研究生数学教学系列 8

应用泛函分析

许天周 编著

GM

科学出版社

研究生数学教学系列

1. 现代科学计算
2. 工程数学基础
3. 矩阵论
4. 非线性系统的理论和方法
5. 矩阵论简明教程
6. 应用随机过程
7. 排序引论
8. 应用泛函分析



ISBN 7-03-010485-4/O · 1629
定 价：29.00 元

研究生数学教学系列(工科类)

应用泛函分析

许天周 编著



科学出版社

2002

内 容 简 介

本书是为工科研究生学习“应用泛函分析”课程而编写的教材. 全书共分八章,内容包括:实分析基础、距离空间、赋范线性空间与 Banach 空间、内积空间与 Hilbert 空间、线性算子的一般理论、谱理论、Banach 空间上的微积分、线性算子半群. 本书着力于说明有限维和无限维分析学的本质差别,尽量用范例来说明各种抽象概念和定理,使读者能了解在无限维空间中处理问题的基本思想、理论和方法,特别是紧性、自伴性、压缩性等在无限维分析学中的重要作用. 书后配有相当数量的习题与提示,为读者掌握泛函分析方法提供必要的训练.

本书内容丰富,深入浅出,利于实用和读者自学,可以作为高等院校理工科本科高年级学生和研究生的教材或教学参考书,也可以供对泛函分析有兴趣的科研、工程技术人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

应用泛函分析/许天周编著. —北京:科学出版社,2002. 8
(研究生数学教学系列(工科类))
ISBN 7-03-010485-4

Ⅰ.应… Ⅱ.许… Ⅲ.泛函分析-研究生-教材 Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 042194 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年8月第 一 版 开本:B5 (720×1000)
2002年8月第一次印刷 印张:19 3/4
印数:1—3 000 字数:329 000

定价: 29.00 元

序　言

随着自然科学、工程技术、特别是计算机科学技术的发展，泛函分析已经日益渗透到工程和数学的许多分支，因而它在力学、物理学、化学工程、控制论和信号处理等许多学科中都起着日益重要的作用，因此，许多大学已把它列为工科研究生必修课程. 本书是根据作者为工科研究生讲授应用泛函分析课程的讲义基础上写成，它可以作为泛函分析的入门教材，对于工科研究生进一步学习泛函分析及其应用和近代数学的其他分支提供必要的基础.

泛函分析有着丰富的理论成果，本书只选取最基本的及较常用的内容. 考虑到工科研究生，大多数仅有工科大学的高等数学基础并且以工程应用为主，因此书中补充了实分析的一些基础知识，并且力图采取比较容易接受的方式来讲述，省略了一些结论的证明过程，直接使用其结果. 尽量用范例来说明各种抽象概念和定理，使读者能够了解在无限维空间中处理问题的基本思想、理论和方法，特别是紧性、自伴性、压缩性等在无限维分析学中的重要作用. 书后配有相当数量的习题与提示，为读者掌握泛函分析方法提供必要的训练.

作者多次讲授应用泛函分析课程，本书在原讲义的基础上修改而成. 在编写过程中，得到了各级领导的关怀与支持. 本书的出版也是在同仁们的鼓励与支持下才得以实现的，特别是恩师王声望先生，是他引导我一直注意泛函分析的应用，他对本书内容的选材和编写提出了许多宝贵意见. 同时，科学出版社吕虹编审也为本书的出版付出了艰辛的劳动. 借本书出版之际，对他们一并表示感谢. 由于编者的水平所限，本书还会存在错误与不妥之处，敬请广大读者批评指正.

作　者

2001 年 11 月

记号与约定

Q: 有理数域; **Z**: 整数集; $\mathbf{Z}_+ = \{n \in \mathbf{Z}: n \geq 0\}$. **N**: 自然数集; $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$: 非负实数.

C: 复数域; **R**: 实数域; **F**: 实数域或复数域.

$\mathbf{F}^n$: n 维欧几里得空间.

$\text{Im}\lambda$: λ 的虚部.

$\text{Re}\lambda$: λ 的实部.

$\text{sgn}\lambda$: λ 的符号函数.

$x \in A$ 与 $x \notin A$ 分别表示元素 x 属于集合 A 与不属于集合 A.

$A \subset B$: 集合 A 是集合 B 的子集.

$A = B$: 集合 A 等于集合 B.

$A \backslash B = A - B$: 集合 A 与集合 B 的差集.

$b/a := \frac{b}{a}$: 数 b 除以数 a.

$A \cup B$: 集合 A 与 B 的并.

$A \cap B$: 集合 A 与 B 的交.

$\prod\limits_{k=1}^{n} X_k = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots \times X_n$, $\prod\limits_{k=1}^{+\infty} X_k = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots$.

$\sum\limits_{k=1}^{n} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$.

$\exists$ 与 $\forall$: 分别表示存在与对于任意的.

$:=$ 或 $\triangleq$: 定义为.

χ_A: 集合 A 的特征函数.

A^c: 集合 A 的补集.

$\emptyset$: 空集.

$P \Rightarrow Q$: 如果 P 成立, 则 Q 也成立.

m: 勒贝格测度.

$\sup A$: 集合 A 的上确界.

$\inf A$: 集合 A 的下确界.

$\max A$: 集合 A 的最大值.

$\min A$: 集合 A 的最小值.

A': 集合 A 的导集.

$\overline{A}$: 集合 A 的闭包.

$A^{\perp}$: 集合 A 的正交补.

$B(a,r)$: 以 a 为中心以 r 为半径的开球.

$\overline{B}(a,r)$: 以 a 为中心以 r 为半径的闭球.

$S(a,r)$: 以 a 为中心以 r 为半径的球面.

$d(x,y)$: 点 x 与点 y 之间的距离.

$d(x,A)$: 点 x 与集合 A 之间的距离.

$d(A,B)$: 集合 A 与集合 B 之间的距离.

$d(A)$: 集合 A 的直径.

$\dim X$: 空间 X 的维数.

s: 一切数列构成的空间.

$l^p\,(1 \leq p < +\infty)$: p 次幂可和数列空间.

l^{∞}: 有界数列空间.

c: 收敛数列空间.

c_0: 收敛于 0 的数列空间.

$L^p\,(1 \leq p < +\infty)$: p 次幂可积函数空间.

L^{∞}: 几乎有界可测函数空间.

$C^k([a,b])$: $[a,b]$ 上具有直到 k 阶连续导数的函数空间.

$V_a^b(f,\Delta)$: f 关于分划 Δ 的变差.

$V_a^b(f)$: f 的全变差.

$\exp(t) = \mathrm{e}^t$.

I_X: 单位算子，恒等算子.

$\|\cdot\|$: 范数.

$\|\cdot\|_p$: $l_p\,(L_p)$ 范数.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$: 内积.

数零，零向量、零算子，零泛函等都记为 0 或 θ.

$A + B = \{a + b:\quad a \in A,\ \ b \in B\}$.

$x + A = \{x + a:\quad a \in A\}$.

$B(X,Y)$: 赋范线性空间 X 上到赋范线性空间 Y 的有界线性算子全体; $B(X)=B(X,X)$.

$F(X,Y)$: 赋范线性空间 X 上到赋范线性空间 Y 的 Fredholm 算子全体; $F(X)=F(X,X)$.

$K(X,Y)$: 赋范线性空间 X 上到赋范线性空间 Y 的紧算子全体; $K(X)=K(X,X)$.

$FR(X,Y)$: 赋范线性空间 X 上到赋范线性空间 Y 的有限秩算子 (算子值域为有限维) 全体; $FR(X)=FR(X,X)$.

$B_2(X,Y)$: Hilbert 空间 X 上到 Hilbert 空间 Y 的 Hilbert-Schmidt 算子全体; $B_2(X)=B_2(X,X)$.

X^*: 空间 X 的对偶空间.

$\mathrm{span}(A)$: 集合 A 生成的子空间.

$\overline{\mathrm{span}(A)}$: 集合 A 生成的闭子空间.

$\ker(T)$: 算子 T 的零空间.

$D(T)$: 算子 T 的定义域.

$T(A)=\{Tx:\ x\in A\cap D(T)\}$.

$R(T)$: 算子 T 的值域.

T^*: 算子 T 的对偶算子或伴随算子.

$\alpha(T):=\dim(\ker(T))$ 、 $\beta(T):=\dim(Y/R(T))$

$R_\lambda=R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}$: 算子 T 的预解式.

$r_\sigma(T)$: 算子 T 的谱半径.

$\rho(T)$: 算子 T 的预解集.

$\sigma(T)$: 算子 T 的谱.

$\sigma_p(T)$: 算子 T 的点谱.

$\sigma_c(T)$: 算子 T 的连续谱.

$\sigma_r(T)$: 算子 T 的剩余谱.

$\mathrm{ind}(T)$: Fredholm 算子 T 的指标.

$\mathrm{D}f(x_0,h)$: 算子 f 在点 x_0 沿着方向 h 的 G 微分.

$\mathrm{D}f(x_0)$: 算子 f 在点 x_0 的 G 导算子.

$\mathrm{d}f(x_0,h)=\mathrm{d}f(x_0)h$: 算子 f 在点 x_0 沿着方向 h 的一阶 F 微分.

$\mathrm{d}f(x_0)$ 或 $f'(x_0)$: 算子 f 在点 x_0 的一阶 F 导算子.

$f^{(n)}(x_0)$: 算子 f 在点 x_0 的 n 阶 F 导算子.

$C^k(U,Y)$: 由 U 上到 Y 的具有 k 阶连续 F 导算子的算子全体构成的集合.

目　录

第一章 实分析基础

§1.1 集 合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念. 把客观世界或思维中一定范围内的所有对象, 作为一个整体来研究, 我们把这个整体就称为一个 **集合**. 构成集合的那些事物称为集合的 **元素**. 例如, 实直线上点的全体构成一个集合, 它的元素是点. 以实数为系数的多项式全体构成一个集合, 它的元素是实系数多项式. 直线上的一切开区间构成一个集合, 这个集合的元素是开区间. $[a,b]$ 上一切连续函数构成一个集合, 这个集合的元素是连续函数.

本节中集合通常用大写字母 A, B, C, $\cdots$ 表示, 集合的元素用小写字母 a, b, c, $\cdots$ 表示.

设 A 是一个集合, 当 a 是集合 A 的元素时, 称 **a 属于 A**, 它的意义与 A 含有 a 相同, 用记号 $a\in A$ 表示. a 不属于 A 用 $a\notin A$ 表示. 当集合 A 是由一切具有性质 P 的元素构成时, 可表示成

$$A=\{x:\quad x\ \text{具有性质}\ P\}.$$

含有有限个元素的集合称为 **有限集**. 含有无限个元素的集合称为 **无限集**. 不含任何元素的集合称为 **空集**, 通常用符号 $\emptyset$ 表示. 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的 **子集**, 记作 $A\subset B$.

为了方便起见, 对于任意的集合 A, 我们规定 $\emptyset\subset A$.

集合的包含关系有以下的性质:

(1) 自反性: $A\subset A$;

(2) 反对称性: $A\subset B$, $B\subset A\Longrightarrow A=B$;

(3) 传递性: $A\subset B$, $B\subset C\Longrightarrow A\subset C$.

若 $A\subset B$, 并且 $B\subset A$, 则称集合 A 与集合 B **相等**, 记作 $A=B$.

注

(1) 对于一个给定的集合, 集合中的元素必须是确定的, 也就是说, 任何一个对象或者是这个给定集合中的元素, 或者不是这个给定集合中的元素, 二者必居其一, 且只能居其一.

(2) 对于一个给定的集合，集合中的元素必须是互异的，也就是说，一个集合中的任何两个元素都不同. 如 2 与 2 不能是同一集合的两个元素.

(3) 集合中的元素无先后次序. 如由元素 2, 4, 6, 8, 9 组成的集合和由元素 4, 2, 8, 9, 6 组成的集合是同一个集合.

(4) 集合中的元素可以是任何事物，因此一个集合也可以作为另一个集合的元素. 如学生按分班组成班集合，学校的所有班组成校集合，校集合中的元素就是另外一些集合.

2. 集合的运算

设 A 与 B 是两个集合，由 A 中的元素和 B 中的元素全体构成的集合称为 A 与 B 的 **并集**，简称 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$，也就是说

$$A\cup B:=\{x:\quad x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由既属于 A 又属于 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的 **交集**，简称 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$，也就是说

$$A\cap B:=\{x:\quad x\in A, \text{而且 } x\in B\}.$$

由所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成的集合称为 A 与 B 的 **差集**，记作 $A\backslash B$，也就是说

$$A\backslash B:=\{x:\quad x\in A,\ \text{但是 } x\notin B\}.$$

考虑集合 X 的元素及其子集 A, B, $\cdots$，此时 $X\backslash A$ 称为 A 的**补集(或余集)**，记作 A^c，也就是说

$$A^c:=X\backslash A=\{x:\quad x\in X,\ \text{但是 } x\notin A\}.$$

对于 X 的子集 A, B，有

$$A\cup A^c=X,\ \ A\cap A^c=\emptyset,\ \ A^{cc}=A,\ \ A\subset B\Longleftrightarrow A^c\supset B^c,$$

集合的运算具有下述运算法则：

(1) 幂等律： $A\cup A=A$, $A\cap A=A$;

(2) 交换律： $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(3) 结合律： $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(4) 分配律：　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(5) 吸收律：　$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$；

(6) 对偶律 (De Morgan 定律)：$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

注　集合的并与交运算还可以推广到任意多个 (有限或无限) 集合的情况. 设 $\{A_\alpha:\ \alpha\in\Lambda\}$ 是一个集族，其中 α 为集合的指标，它在指标集 Λ 中变化，则这族集合的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\triangleq\{x:\ \ \exists\alpha\in\Lambda,\ x\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\triangleq\{x:\ \ \forall\alpha\in\Lambda,\ x\in A_\alpha\}.$$

De Morgan 定律可推广为

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)^c=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c,\quad \Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)^c=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha^c.$$

De Morgan 定律也称为对偶原理，在集合论及其应用中有重要的作用. 若等式与基本集 X 的子集有关，用代换的方法，把所考察的一切子集换成它的补集，并运算换成交运算，交运算换成并运算，就会得到另一个对偶的等式. 如果是带有 $\subset$ 或 $\supset$ 的包含关系式，再把两者互换，所得关系式也成立.

3. 笛卡儿积 (直积集)

设 A，B 是给定的集合，则称

$$A\times B:=\{(x,\ y):\ \ x\in A,\ y\in B\},$$

为 A, B 的 **笛卡儿积 (直积集)**，如 $A=[a,\ b]$，$B=[c,\ d]$，则 $A\times B=[a,\ b]\times[c,\ d]$，也就是矩形中的点所组成的集合. $\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^2$，即表示普通平面上点所组成的集合. $A\times B$ 中的元素也称为有序对，当 $x\neq y$ 时，$(x,\ y)\neq(y,\ x)$. $(x_1,\ y_1)=(x_2,\ y_2)\Longleftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2$. 设 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是给定的集合，则

$$\begin{aligned}&A_1\times A_2\times\cdots\times A_n\\ :=&\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n):\ x_1\in A_1,\ x_2\in A_2,\cdots,\ x_n\in A_n\}.\end{aligned}$$

§1.2 映　射

在高等数学中已学过函数关系 $y=f(x)$, 它是从实数集 $\mathbf{R}$ (或其子集) 到 $\mathbf{R}$ 中的一种对应关系. 这个概念可推广到一般集合上.

设 X、Y 是两个非空集合, 如果有一个对应关系 (或法则) 存在, 对于 X 中的每一元素 x, 有 Y 中一个元素 y 与其对应, 则称给出了一个从 X 到 Y 的 **映射** f, 记作 $f:\ X\longrightarrow Y$, 而且把 x 与 y 的对应关系写成 $y=f(x)$, 表示 f 把 x 映成 y, 称 y 是 x 在映射 f 下的 **像**, 称 X 是 f 的 **定义域**, 记作 $D(f)$, 而集合 $f(X):=\{f(x):\ x\in X\}$ 称为 f 的 **值域**, 记作 $R(f)$. 一般地, $R(f)$ 是 Y 的一个子集, 不必是整个 Y, 称 $\{(x,\ y):\ y=f(x),\ x\in X\}\subset X\times Y$ 为映射 f 的 **图像**.

由于映射是函数概念的推广, 有时也可把映射称为函数、算子、变换, 特别地, 当 Y 是数集 (实数集 $\mathbf{R}$ 或复数集 $\mathbf{C}$) 时, f 称为定义在集合 X 上的 **泛函**.

对于映射 $f:\ X\longrightarrow Y$, 当 $f(X)=Y$ 时, 称为 **满射或映上的**, 也就是说 f 是由 X 到 Y 上的映射.

对映射 $f:\ X\longrightarrow Y$, 如果对 X 中所有不同的两个元素 x_1, x_2, 恒有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称 f 为 **单射 (或一一映射)**, 即对于 $f(X)$ 中每一个元素 y, 存在 X 中唯一的元素 $x\in X$ 与其对应, 此时 X 与 $f(X)$ 的元素之间有一一对应关系. 如果 f 既是满射又是单射, 则称 f 为 X 到 Y 上的 **双射**. 此时 X 与 Y 的元素之间有一一对应关系.

对于映射 $f:\ X\longrightarrow Y$ 和 $g:\ Y\longrightarrow Z$, 由 $h(x)=g(f(x))$ 所确定的映射 $h:\ X\longrightarrow Z$ 称为 f 和 g 的 **复合映射**, 记作 $h=g\circ f$. 它是复合函数概念的推广. 对映射 $f:\ X\longrightarrow Y, g:\ Y\longrightarrow Z, \phi:\ Z\longrightarrow W$ 的复合映射来说, 结合律 $(\phi\circ g)\circ f=\phi\circ(g\circ f)$ 成立. 对于一一映射 $f:\ X\longrightarrow Y$, 使 $y=f(x)$ 对应于 x 的映射 $f^{-1}:\ Y\longrightarrow X$ 称为 f 的 **逆映射**. 逆映射是反函数概念的推广. 一般来说, 有

$$f\circ f^{-1}=I_Y,\quad f^{-1}\circ f=I_X.$$

对于映射 $f:\ X\longrightarrow Y$, 如果存在映射 $g:\ Y\longrightarrow X$, 使得 $f\circ g=I_Y$, $g\circ f=I_X$, 则 f 必是双射, 而且 $f^{-1}=g$.

如果有两个映射 f、g, $D(f)\subset D(g)$, 且对于任意的 $x\in D(f)$, $f(x)=g(x)$, 则称 g 是 f 在集 $D(g)$ 上的 **延拓或扩张**, 称 f 是 g 在 $D(f)$ 上的 **限制**, 记作 $f=g|_{D(f)}$.

设映射 $f: X \longrightarrow Y$, $A \subset X$, 集合 $f(A) := \{f(a): a \in A\}$ 称为 A 在 f 下的**像**. 如果 $B \subset Y$, 集合 $f^{-1}(B) = \{x: f(x) \in B\}$ 称为 B 关于 f 的**原像**.

注　这里的 f^{-1} 并不表示逆映射存在, 但当逆映射存在时, B 在逆映射 f^{-1} 下的像即是 B 关于 f 的原像.

定理 1.1　设映射 $f: X \to Y$, 而且 A_1, A_2, A 是 X 的子集, 则有

(1) $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

(3) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;

(4) $f(X \backslash A) \subset f(X) \backslash f(A)$, $f^{-1}(f(A)) \supset A$;

另一方面, 设 B_1, B_2, B 是 Y 的子集, 则有

(5) $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

(6) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

(7) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

(8) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \subset B$.

注　(3) 中等号不一定成立. 例如, 如果取 $f(x) = x^2$, $A_1 = [-2, -1]$, $A_2 = [1, 2]$, 则 $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$, 但 $f(A_1) \cap f(A_2) = [1, 4]$, 这就说明 (3) 中等号不能成立.

例 1.2

(1) 当映射 f 的定义域和值域同为 X, 即 $f: X \longrightarrow X$, 而对所有的 $x \in X$, $f(x) = x$, 则 f 称为 X 上的恒等映射, 以 $f = I_X$ 表示之.

(2) 对于函数 $f(x) = x^2$. 因为 f 的定义域和值域选取的不同将会属于不同类型的映射.

(i) $f: (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ 既不是满射也不是一一映射;

(ii) $f: (-\infty, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是满射而不是一一映射;

(iii) $f: [0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ 是一一映射而不是满射,

(iv) $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 是双射;

(v) $f: (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$ 是双射.

(3) 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, 对于 $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$, 则线性变换 $y = Ax$ 确定了一个映射 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

(4) 设 $R([0, 1])$ 表示闭区间 $[0, 1]$ 上黎曼 (Riemann) 可积函数全体构成的集合, 定义 $f: R([0, 1]) \to \mathbf{R}$ 为

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall\ x(t) \in R([0, 1]),$$

则泛函 f 是满射但不是一一映射.

(5) 设 $C([0,\ 1])$ 表示闭区间 $[0,\ 1]$ 上连续函数全体构成的集合, $C^1([0,\ 1])$ 表示闭区间 $[0,\ 1]$ 上具有一阶连续导函数的函数全体构成的集合, 定义映射 $f:\ C([0,\ 1])\to C^1([0,\ 1])$ 为

$$[f(x)](t)=\int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u,\quad \forall\ x(t)\in C([0,\ 1]),$$

则 f 是一一映射但不是满射. 事实上, 如果 $f(x)=f(y)$, $x,\ y\in C([0,\ 1])$, 则对于任意的 $t\in[0,\ 1]$ 有 $[f(x)](t)=[f(y)](t)$, 求导得 $x(t)=y(t)$ $(t\in[0,\ 1])$, 因此 $x=y$, 故 f 是一一映射. 但 f 不是满射, 用反证法证明. 由于 $u(t)=1\in C^1([0,\ 1])$, 如果存在 $x\in C([0,\ 1])$, 满足 $[f(x)](t)=u(t)=1$, 求导得到 $x(t)=0$, 但是 $[f(0)](t)=\int_0^t 0\,\mathrm{d}u=0$, 这就产生一个矛盾.

§1.3 集合的基数

1. 集合的基数

下面讨论无限集合中元素多少的概念和方法, 主要介绍集合的对等与基数的概念.

设 A、B 是两个集合, 若有双射 $f:\ A\longrightarrow B$, 则称 A 和 B 是**对等的**, 记作 $A\sim B$.

对等关系有下列三条性质:

(1) 自反性: $A\sim A$;

(2) 对称性: $A\sim B\Longrightarrow B\sim A$;

(3) 传递性: $A\sim B$, $B\sim C\Longrightarrow A\sim C$.

一般地, 某集合 X 上具有 (1), (2), (3) 三条性质的关系 $\sim$ 称为**等价关系**. 如 $a\sim b$, 则称 a 和 b**等价**. 同元素 a 等价的全体元素的集合称为 a 的等价类, 各等价类是非空的, 因为 a 属于 a 的等价类. 相异的等价类无公共元素. 集合 X 可按等价关系分类, 即分成等价类. 等价关系在数学和一般科学以至在日常生活中是很多的, 如图形的全等, 相似等等都是等价关系. 这里集合对等是一种特殊的等价关系, 可用对等关系对所有集合进行分类, 彼此对等的集合属于同一集合类. 容易看出, 元素个数相同的两个有限集可以建立一一对应, 因而是对等的. 反之, 两个有限集之间存在一一对应, 则其元素个数必定相等. 如果 n 是一个确定的自然数, 所有元素个数等于 n 的有限

集是对等的. 元素的个数 n 是这些对等的有限集的共同属性. 这个概念可推广到无限集.

凡是对等的集合称为具有相同的基数. 因此, 集合的基数是对等的集合所具有的共同属性. 一个集合 A 的基数, 也就是集合 A 的 "广义的元素个数" 记为 $\bar{A}$. 如果 A 是含有 n 个元素的有限集, 则其基数 $\bar{A}=n$. 对有限集而言, 两个集合具有相同的基数, 即它们所含的元素个数相等, 因此, 两集合具有相同的基数, 就是有限集中元素个数概念的推广, 它刻画了集合所含元素的多少.

例 1.3 全体偶数的集合 $\{2, 4, 6, \cdots\}$ 与自然数集 $\mathbf{N}$ 之间存在一一对应, 也就是说 $\{2, 4, 6, \cdots\}\sim\mathbf{N}$, 所以偶数集与自然数集的基数是相等的.

例 1.4 区间 $(-1, 1)$ 与实数集 $\mathbf{R}$ 是对等的. 因为

$$f(x)=\tan(\frac{\pi}{2}x),\quad x\in(-1, 1).$$

是 $(-1, 1)$ 到 $\mathbf{R}$ 上的双射.

这两个例子说明, 无限集与其子集具有相同的基数, 而有限集与其子集不可能建立一一对应, 因而不可能具有相同的基数. 可以证明: 任何一个无限集必能与它的某一真子集对等, 因而有相同的基数, 这说明无限集与有限集有着本质区别.

2. 可数集

定义 1.5 凡与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集合称为**可数集或可列集**. 一个集合是可数的或有限的时, 称为**至多可数**

显然, 当且仅当集合 A 的所有元素可用自然数编号, 排成一个无穷序列的形式 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ 时, A 是可数集. 以上的 A 作为集合, 当 $i\neq j$ 时 $a_i\neq a_j$. 而以往定义的序列是自然数集 $\mathbf{N}$ 到某一集合 A(如 $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 等) 中的映射 $f:\ \mathbf{N}\to A$, $f(n)=a_n$. 也可记作 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ 或简记作 $\{a_n\}$. 此时可能有 $a_i=a_j$. f 的值域可以是可数集或有限集.

例 1.6 整数集 $\mathbf{Z}$ 是可数集.

证明 一切整数与自然数之间可按下面排列建立一一对应:

$$\begin{array}{cccccccccc}\mathbf{Z}: & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \cdots \\ \mathbf{N}: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots\end{array}$$

因而 $\mathbf{Z}$ 是可数集.

下面给出可数集的一些性质.

性质 1.7　可数集的任一子集是可数的或有限的.

证明　设 A 是可数集，而 B 是它的子集，现在对集合 A 的元素进行编号：a_1，a_2，a_3，$\cdots$. 假设 a_{n_1}，a_{n_2}，$\cdots$ 是含于 B 的所有元素. 如果在数 n_1，n_2，n_3，$\cdots$ 中有最大的数，那么 B 是有限集，如果在数 n_1，n_2，n_3，$\cdots$ 中没有最大的数，那么 B 是可数的，因为它的元素 a_{n_1}，a_{n_2}，$\cdots$ 可用数 1，2，$\cdots$ 进行编号.

性质 1.8　有限个或可数个可数集的并仍是可数集.

证明　设 A_1，A_2，$\cdots$ 是可数集，不妨假设它们两两不相交，否则可用 A_1，$A_2\backslash A_1$，$A_3\backslash(A_1\cup A_2)$，$\cdots$ 来代替它们，其中每一个集合至多可数，而其并等于 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = S$

下面把 A_1，A_2，$\cdots$ 的一切元素排成如下的形式：

$$\begin{array}{llllllllll}
A_1: & a_{11} & \longrightarrow & a_{12} & & a_{13} & \longrightarrow & a_{14} & & \cdots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
A_2: & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \cdots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \cdots \\
A_3: & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & \cdots \\
 & & \swarrow & & & & & & & \cdots \\
A_4: & a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & a_{44} & & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

把所有这些元素按对角线编号，则 S 可以表示成为一个无穷序列

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13},\ a_{14},\ a_{23},\ a_{32},\ a_{41},\ \cdots$$

故 S 是可数集.

性质 1.9　有限多个可数集 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的直积集 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 是可数的.

证明　先证 $n=2$ 的情况. 设 A，B 可数，$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots\}$，$B=$

$\{b_1, b_2, \cdots\}$, 则

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1),\\ (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \cdots\}.$$

$A \times B$ 中一般的元素为 (a_i, b_j), 按 $i + j = m$ 的大小, 由小到大排列, 对于 $m = 2$, 只有 (a_1, b_1); 对于 $m = 3$ 时有 (a_1, b_2), (a_2, b_1); 对于 $m = 4$ 时有 (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1); $\cdots$. 这样可把 $A \times B$ 的所有元素排列出来, 因而 $A \times B$ 可数.

假设 $n = k$ 时性质 1.9 成立, 即是说 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ 是可数集, 则

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1} = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1},$$

是两个可数集的直积, 因而也可数.

注 可数多个可数集 A_n 的直积 $\prod_{n=1}^{+\infty} A_n$ 不可数. 当 $A_n = \{0, 1\}$ 只有两个元素时, $\prod_{n=1}^{+\infty} A_n$ 中的元素是在 $\{0, 1\}$ 中取值的序列: $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$, $x_n = 0$, 或 1, $n = 1, 2, 3, \cdots$. 这样一个序列相当于一个二进制小数 (有限或无限小数), 其全体构成 $[0, 1]$ 区间, 以后将证明 $[0, 1]$ 区间是不可数的.

性质 1.10 任一无限集都包含可数子集.

证明 设 M 是无限集, 在 M 中任取一元素 a_1, 由于 M 是无限集, 可在 M 中找到异于 a_1 的元素 a_2. 假设已找到了 n 个不同的元素 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 由于 M 是无限集, $M \backslash \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \neq \emptyset$, 因此存在 $a_{n+1} \in M \backslash \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 这样一直进行下去就能得到 M 的可数子集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$.

例 1.11

(1) 有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集;

(2) $\mathbf{R}^n$ 上的有理点集是可数集;

(3) 有理系数多项式全体是可数集;

(4) 直线上任何一个由互不相交的开区间所构成的集合, 或者是可数集, 或者是有限集;

(5) 在区间上的单调函数的间断点至多为可数个.

证明 (1) 每个有理数均可唯一地写成分母为正整数的既约分数 $a = p/q$, $q > 0$, 按和数 $|p| + q = n$ 的大小由小到大排序, $n = 1$ 时的分数只有

$0/1$, $n=2$ 时的分数是 $1/1$ 和 $-1/1$, $n=3$ 时的分数是 $2/1$, $-2/1$, $-1/2$ 等等，这样将一切有理数排列如下：

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \cdots,$$

也就是说，首先写出 $n=1$ 的分数，然后写出 $n=2$ 的分数，再写出 $n=3$ 的分数等等．这样对任何有理数都可排列出，得到一个序号，因此，一切有理数与一切自然数之间建立了一一对应．

(2) 如果 $(x,y)\in\mathbf{R}^2$，而且 x, $y\in\mathbf{Q}$，则称 (x,y) 为有理点．因为 $\mathbf{R}^2$ 上的有理点集为 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$，而且 $\mathbf{Q}\sim\mathbf{N}$．利用性质得到 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\sim\mathbf{N}$．同理可以证明，$\mathbf{R}^n$ 中有理点集为可数集．

(3) 设 P 为有理系数多项式全体构成的集合．P_k 为不大于 k 次的有理系数多项式的集合，也就是说

$$P_n:=\{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n:\quad a_k\in\mathbf{Q},\ 0\le k\le n\},$$

因此，$P=\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}P_n$．因为多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 与 $n+1$ 维向量 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)$ 一一对应，所以 $P_n\sim\mathbf{Q}^{n+1}$，其中 $\mathbf{Q}^{n+1}$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的有理点集．由 (2) 知 $\mathbf{Q}^{n+1}$ 为可数集，从而 P_n 为可数集．再由性质 1.8 知 $P=\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}P_n$ 为可数集．

(4) 在每个区间中取一个有理数与这个区间对应，那么不同的有理数对应不同的区间，因此，开区间集与有理数集的一个子集对等，但是有理数集的子集只可能是有限的或可数的．

(5) 单调函数 $f(x)$ 的每个间断点 t 在 y 轴上对应着一个开区间 $(f(t-0),f(t+0))$，并且这些开区间都互不相交，再由 (4) 知 (5) 的结论是对的．

3. 不可数集

我们已经知道有理数集 $\mathbf{Q}$ 是可数集，是否存在不可数集？下面的定理对此作出了肯定的回答

定理 1.12 区间 $[0,\ 1]$ 中的点是不可数的．

证明 用反证法．假定 $[0,\ 1]$ 中的点是可数的，那么它们能排列成一个无穷序列：a_1，a_2，a_3，$\cdots$．

把它们写成十进制小数的形式:

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\ \cdots,$$
$$a_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots,$$
$$a_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这里的 a_{ik} 是数 a_i 的第 k 位小数的数字. 注意 $1 = 0.999\cdots$, 按照 Cantor 对角线程序构造小数 $b = 0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$, 其中当 $a_{nn} = 1$ 时取 $b_n = 2$, 当 $a_{nn} \neq 1$ 时取 $b_n = 1$. 这个十进制小数 $b \in [0,\ 1]$, 而小数 b 与 a_1 的第一位数字不同, 与 a_2 的第二位数字不同, 等等. 因为对于任何的 n, $b_n \neq a_{nn}$. 可见对于任何的 n, $b \neq a_n$. 这与开始的假设相矛盾, 因此 $[0,\ 1]$ 是不可数集.

容易证明, 开区间 $(0,\ 1)$、$(a,\ b)$ 和闭区间 $[a,\ b]$ 及实数集 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ 都可与 $[0,\ 1]$ 建立一一对应, 因而是不可数集, 且与 $[0,\ 1]$ 有相同的基数. 可数集的基数用希伯莱字母 $\aleph_0$ (阿列夫零) 来表示. 全体实数集 $\mathbf{R}$ 的基数用符号 c 来表示, 称为**连续统的基数**.

§1.4 实数的几个定理

我们已经知道任意两个实数 a、b 是可以比较大小的, 也就是 $\mathbf{R}$ 上有一种次序关系, 具有如下性质:

(1) 自反性: $a \leq a$;

(2) 反对称性: $a \leq b,\ \ b \leq a \Longrightarrow a = b$;

(3) 传递性: $a \leq b,\ \ b \leq c \Longrightarrow a \leq c$.

一般来说, 如果一个集合 X 的一些元素之间具有满足上述三个条件的关系 "$\leq$", 则称这种关系 "$\leq$" 为**半序关系**. 定义了某种半序关系的集合 $(X, \leq)$ 就称为**半序集**. 如果半序集中任意两个元素 a, b, $a \leq b$ 和 $b < a$ 两者中至少有一个成立, 则称此集合为**全序集**. 显然, 实数集 $\mathbf{R}$ 及其子集都是全序集.

设 $A \subset \mathbf{R}$, 如果存在 $C \in \mathbf{R}$, 使得对于任意的 $a \in A$, 都有 $a \leq C$, 则称 C 是 A 的一个**上界**, 同时就说集合 A **有上界**. 集合 A 的上界不是唯一的, 如果 C 是 A 的上界, 则任何大于 C 的数 C_1 也是 A 的上界, 同时注意

A 的上界不一定在 A 中，同样地，如果存在 $d \in \mathbf{R}$, 使得对于任意的 $a \in A$ 都有 $d \leq a$, 则称 d 是 A 的一个 **下界**, 同时就说集合 A **有下界**. 当然，如果集合 A 同时有下界和上界，则称 A**有界**. 显然，A 是有界的，当且仅当存在一个正数 $C \in \mathbf{R}$ 使得对于任意的 $a \in A$, 都满足不等式 $|a| \leq C$. 如果 A 有上界，而且 A 的上界中有一个最小者 M, 则称 M 是 A 的 **上确界**, 记作 $M = \sup A$. M 是 A 的上确界，也就是要满足下述两个条件：(1) M 是 A 的上界. (2) 对 A 的任一上界 C, 有 $M \leq C$.

注 由此定义知，如果 A 有上确界，则必是唯一的. 事实上，如果 A 有两个上确界，M, M', 由条件 (1) M, M' 都是 A 的上界，由条件 (2) $M \leq M'$, $M' \leq M$, 故 $M = M'$. 此外，我们也有：M 是 A 的上确界，当且仅当 (1) 对于任意的 $a \in A$, 满足 $a \leq M$, (2) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 在 A 中始终可以找到一个元素 a, 使得 $a > M - \varepsilon$.

如果 A 无上界，可记作 $\sup A = +\infty$.

类似于上确界也可以定义下确界 (或最大下界). 如果 A 有下界，而且 A 的下界中有一个最大者 m, 则称 m 是 A 的 **下确界**, 记作 $m = \inf A$, m 是 A 的下确界就是说 (1) m 是 A 的一个下界；(2) 对 A 的任一下界 d, 有 $d \leq m$. 如果 A 有下确界，则是唯一的. m 是 A 的下确界，当且仅当

(1) 对于任意的 $a \in A$, 满足 $a \geq m$;

(2) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 在 A 中始终可以找到一个元素 a, 使得 $a < m+\varepsilon$.

如果 m 是 A 的一个下界，则 m 是 A 的下确界，当且仅当存在序列 $\{a_n\} \subset A$, 使得 $a_n \to m\,(n \to +\infty)$.

如果 A 无下界，记作 $\inf A = -\infty$.

下面给出刻画实数连续性的几个等价命题，但略去其证明.

定理 1.13 (确界存在定理)

(1) 任何有上界的非空实数集 A 必有上确界；

(2) 任何有下界的非空实数集必有下确界.

注 如果集合 A 的上 (下) 确界属于 A, 则此上 (下) 确界即是 A 的最大 (小) 值.

定理 1.14 (单调有界定理)

(1) 设 $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ 是单调增加的有界点列，则 $\{x_n\}$ 必有极限并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n\}$;

(2) 设 $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ 是单调减小的有界点列，则 $\{x_n\}$ 必有极限并且 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n\}$.

定理 1.15 (闭区间套定理) 设 $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \cdots$ 是一列有界闭区间, 满足 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n = 1, 2, \cdots$, 并且有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, 那么存在唯一的 $x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n, b_n]$.

设 $\{x_n\}$ 是实或复点列, 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在自然数 N, 当 $n, m \geq N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$, 则称点列 $\{x_n\}$ 为 **Cauchy 点列或基本点列**.

定理 1.16 (完备性定理) 点列 $\{x_n\} \subset \mathbf{R}$ 收敛的充分必要条件是: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 当 $n, m \geq N$ 时, 有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

例 1.17

(1) 设 a_n 是 $\sqrt{3}$ 的前 n 位有效数字, 则 $\{a_n\}$ 是基本点列;

(2) 设 $x_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$, $n = 1, 2, \cdots$, 证明 $\{x_n\}$ 是发散的.

证明 (1) 因为 $|a_{k+1} - a_k| \leq (1/10)^{k-1}$, 故对于任意的自然数 p, 有

$$\begin{aligned}|a_{n+p} - a_n| &\leq \sum_{k=n}^{n+p-1}|a_{k+1} - a_k| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} 0.1^{k-1} \\ &= 0.1^{n-1}/(1-0.1) \to 0\,(n \to +\infty),\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 是基本点列.

(2) 对于任意的自然数 n, 取 $m = 2n$, 则有

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

于是如果取 $\varepsilon = 1/2$, 则不会存在这样一个自然数 N, 使得当 $m, n > N$ 时

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{2},$$

故 $\{x_n\}$ 不是基本点列, 从而由完备性定理知 $\{x_n\}$ 发散.

注 完备性定理的重要性在于给出了判断数列敛散性的实际可行的办法, 而无需事先知道极限的值.

定理 1.18 (列紧性定理) 任一有界实数列 $\{x_n\}$ 必有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$.

定理 1.19 (有限覆盖定理、紧性定理) 设 $[a, b]$ 是有界闭区间, $\{(a_\lambda, b_\lambda):\ \lambda \in \Lambda\}$ 是一族开区间, 使得 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, b_\lambda) \supset [a, b]$ (这时称此开区间族是 $[a, b]$ 的一个开覆盖), 则可从其中选出有限个开区间 $(a_{\lambda_1}, b_{\lambda_1})$, $(a_{\lambda_2},$

b_{λ_2})，$\cdots$，$(a_{\lambda_n}, b_{\lambda_n})$，使得 $\bigcup_{k=1}^{n}(a_{\lambda_k}, b_{\lambda_k}) \supset [a, b]$(这有限个开区间称为原来开覆盖的有限子覆盖).

§1.5 闭区间上连续函数的性质

设 $f: E \longrightarrow \mathbf{R}$，$x \in E$，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，始终存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$，使得当 $x' \in E$ 而且 $|x' - x| < \delta$ 时，有 $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$，则称**函数 $f(x)$ 在 x 点连续**．如果 $f(x)$ 在 E 的每一点上连续，则称 **$f(x)$ 在 E 上连续**．设函数 $f(x)$ 定义在点集 $E \subset \mathbf{R}$ 上，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，始终存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (δ 与 x 无关)，使得对于任意的 $x, x' \in E$，只要它们满足 $|x' - x| < \delta$，就有 $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$，则称 $f(x)$ 在集合 E 上**一致连续**．

注 连续性是局部定义的，即就是对每一点来定义，对任意的 $\varepsilon > 0$，可以找到一个 $\delta > 0$，此 δ 不仅与 ε 有关，而且与 x 有关．

函数 $f(x)$ 在集合 E 上的连续性与一致连续性有所不同，前者描述函数在一个点的局部性态，而后者则要求对任意 $\varepsilon > 0$，对 E 中的所有点，能找到共同的 $\delta = \delta(\varepsilon)$，它描述函数 $f(x)$ 在 E 上的整体性态．由定义可以看出，如果函数 $f(x)$ 在集合 E 上一致连续，则它在 E 上连续，但其逆命题不成立．

例 1.20

(1) 设 $f(x) = \frac{1}{x}$，$E = (0, 1)$，则 $f(x)$ 在 E 上连续，但不一致连续；

(2) 函数 $f(x) = 3\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不仅连续而且一致连续．

证明 (1) 在微积分中已知此函数在 $(0, 1)$ 上是连续的．下面证明它在 E 上不一致连续．取 $\varepsilon = 1$，对任意的 $\delta > 0$，取自然数 n 充分大，使得 $1/n < \delta$．取 $x = 1/n, x' = 1/2n$，则

$$|x - x'| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \delta,$$

而

$$|f(x) - f(x')| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| = |n - 2n| = n \geq 1.$$

(2) 仅说明一致连续．因为

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)| &= 3|\cos x-\cos x_0| \\
&= 6\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \\
&\le 6\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le 6\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = 3|x-x_0|.
\end{aligned}
$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\varepsilon/3$, 则对于任意的 x, $x_0\in(-\infty,+\infty)$, 只要它们满足 $|x-x_0|<\delta$, 必有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

定理 1.21

(1) (有界性定理) 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定有界;

(2) (最值定理) 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值;

(3) (介值定理) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则对于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意一数 μ, 至少存在一点 $\xi\in[a, b]$, 使得 $f(\xi)=\mu$;

(4) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $M=\max\limits_{x\in[a, b]} f(x)$, $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 则函数 $f(x)$ 的值域为 $[m, M]$;

(5) 如果 $f(x)$ 是区间 E (有限的或无限的, 开的、闭的或半开半闭的) 上不恒等于常数的连续函数, 则 $f(x)$ 在 E 上的函数值构成一个区间.

定理 1.22 (一致连续定理) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数是一致连续的.

若对于区间 E 中每一个确定的 $x\in E$, 函数列 $\{f_n\}$ 所对应的点列 $\{f_n(x)\}$ 都收敛于 $f(x)$, 则称**函数列 $\{f_n\}$ 在区间 E 上收敛于函数 f**. 按数列极限的定义, 对任何事先给定的 $\varepsilon>0$, 都存在着自然数 $N=N(x)$, 使得当 $n>N$ 时有, $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 这里的 N 不仅与 ε 有关, 而且还与确定此点列的 x 有关.

注 连续函数列 $\{f_n\}$ 的极限函数 f 不一定还是连续函数.

例 1.23 连续函数列 $f_n(x)=x^n$, $x\in[0, 1]$ 的极限函数不是连续函数.

证明 容易验证

$$
\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty} x^n=\begin{cases} 0, & x\in[0, 1), \\ 1, & x=1, \end{cases}
$$

所以极限函数为

$$
f(x)=\begin{cases} 0, & x\in[0, 1), \\ 1, & x=1. \end{cases}
$$

此极限函数在 $x=1$ 点显然不连续，所以它在 $[0,\ 1]$ 上不连续.

定义 1.24 设 $\{f_n\}$ 是定义在区间 E (有限的或无限的，开的、闭的或半开半闭的) 上的函数列，它的极限函数是 f. 若对任何事先给定的正数 ε，都存在着一个与 x 无关的自然数 N 使得当 $n>N$ 时，不论 $x\in E$ 为何值，都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，则称 **$\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 f**.

注 一致收敛的几何意义是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，当 n 充分大之后，曲线 $y=f_n(x)$ 全部 (不是曲线的一段) 进入带形区域 $f(x)-\varepsilon<y<f(x)+\varepsilon$.

例 1.25 函数列 $\left\{f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right\}$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上是一致收敛的.

证明 很明显 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$. 因为对于任意的 $x\in[0,1]$，有 $1+n^2x^2\geq 2nx$，这样就有

$$0\leq|f_n(x)-0|=f_n(x)=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\leq\frac{1}{2n}.$$

此外，注意到上述不等式右端的 $\frac{1}{2n}$ 与 x 无关，因此对于任意给定的 $\varepsilon>0$，只要取 $N=N(\varepsilon)=[\frac{1}{2\varepsilon}]$，当 $n>N$ 时，只要 $x\in[0,\ 1]$ 就会有

$$|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

故数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上是一致收敛的.

定理 1.26 函数列 $\{f_n(x)\}$，$f_n(x):\ E\subset\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ 一致收敛于 $f(x):\ E\subset\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ 的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，始终存在自然数 N 使得当 $n,\ m>N$ 时，对每一个 $x\in E$，恒有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$ 成立.

证明 必要性. 设 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$，则对 $\varepsilon/2>0$，存在自然数 n_0，使得对于任意的 $x\in E$，当 $n,\ m\geq n_0$ 时，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2,\qquad |f_m(x)-f(x)|<\varepsilon/2,$$

因此，对于任意的 $x\in E$，当 $n,m\geq n_0$ 时，恒有

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|+|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

充分性. 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，特别当 $\varepsilon/2>0$ 时，始终存在自然数 n_0，使得对于任意的自然数 $n,\ m>n_0$，只要 $x\in E$ 就有

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon/2. \tag{1.5.1}$$

由此可知，对每一个固定的 $x \in E$, $\{f_n(x)\}$ 是 Cauchy 数列，由实数的完备性知，它收敛于某一个依赖于 x 的数，此极限值记为 $f(x)$，从而有 $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x) = f(x)$. 在 (1.5.1) 中令 $m \to +\infty$，那么，当 $n \geq n_0$ 时，对每一个 $x \in E$，有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

这就说明了 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

定理 1.27 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数序列，如果 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$，则 $f(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续.

证明 对 $[a, b]$ 上任意一点 x,

$$\begin{aligned}|f(x+\Delta x) - f(x)| \leq\ & |f(x+\Delta x) - f_n(x+\Delta x)| \\ +\ & |f_n(x+\Delta x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.\end{aligned}$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$，总存在自然数 N，当 $n \geq N$ 时，就有

$$|f(x+\Delta x) - f_n(x+\Delta x)| < \varepsilon/3, \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

由于 $f_N(x)$ 在 x 点连续，因此存在 $\delta > 0$，当 $|\Delta x| < \delta$ 时，有

$$|f_N(x+\Delta x) - f_N(x)| < \varepsilon/3.$$

这样，对于任意的 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，当 $|\Delta x| < \delta$ 时，始终成立

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

这就说明 $f(x)$ 在 x 点连续.

定理 1.28 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数列，若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，而且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

即就是可以在积分号下求极限 (或极限号与积分号可以交换次序).

证明 由定理 1.27 知，$f(x)$ 是连续的，因而在 $[a, b]$ 上可积，这样一来，对任意的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 n_0，当 $n \geq n_0$ 时，对每一个 $x \in [a, b]$，我们就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a),$$

因而

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$< \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b \mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

也就是说

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 1.29 (Weierstrass 多项式逼近定理) 闭区间 $[a,\ b]$ 上每一个连续函数都可表示成某一多项式序列的一致收敛极限.

§1.6　点集与测度

1. 点集的概念

定义 1.30　如果 $a\in\mathbf{R}$, 则含有 a 的任一开区间, 都称为点 a 的一个**邻域**. 以 a 为中心, δ 为半径的开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 称为 a 的 δ **邻域**, 记作 $B(a,\ \delta)$.

对集合 $E\subset\mathbf{R}$ 中的一点 a, 如果有 a 的某个邻域 $(\alpha,\ \beta)$ 使得 $a\in(\alpha,\ \beta)\subset E$, 则称 a 为 E 的 **内点**. 对 E 中的另一点 b, 若有 b 的一个邻域 $(\alpha,\ \beta)$ 使得 $(\alpha,\ \beta)$ 中不再包含 E 的其他点, 则称 b 为 E 的 **孤立点**. 对 $c\in\mathbf{R}$ (c 不一定属于 E), 如果 c 的每一个邻域中都含有 E 的无穷多个点, 则称 c 为 E 的 **聚点**. 集 E 的聚点全体构成的集合, 称为 E 的 **导集**, 记作 E'. $E'\cup E$ 称为 E 的 **闭包**, 记作 $\overline{E}$.

由上面的定义知 $E\subset\mathbf{R}$ 的内点与孤立点一定属于 E, 但 E 的聚点可以属于 E, 也可以不属于 E.

例 1.31　点集

$$E=(0,\ 1)\cup\{5+1/2n:\quad n=1,\ 2,\ \cdots\},$$

点 0.8 是 E 的一个内点. E 的内点集合为 $(0,\ 1)$. E 的聚点集合是 $[0,\ 1]\cup\{5\}$, 其中 E 的聚点 0、1 与 5 均不在 E 中, 而 $\{5+1/2n:\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 都是 E 的孤立点.

由定义直接可知: 集 $E\subset R$ 中的点, 若按与 E 的关系来分, 可分为三类: 一类是内点; 一类是孤立点; 另一类是介于这两种情况之间的点, 在该

点任一邻域中还有除它本身以外的其他属于 E 的点，但又有非 E 的点，这是 E 的一种特殊的聚点.

2. 开集及其性质

定义 1.32 若点集 E 中的每一点都是 E 的内点，则称 E 为**开集**. 显然，开集中没有非内点的点. 从这个意义上讲，空集 $\emptyset$ 是开集，因为空集没有点，所以也没有非内点的点.

例 1.33 实数集 $\mathbf{R}$, 所有的开区间 $(a,\ +\infty)$, $(-\infty,\ b)$, 或 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}(2n,\ 2n+1)$ 等都是开集.

我们可以证明，无穷多个开区间的并是开集，反之，还可以证明，任一开集也可以表示为有限个或可列个开区间的并，这些结论包含在下面的定理中.

定理 1.34

(1) 任意多个开集的并集也是开集；

(2) 有限个开集的交集也是开集；

(3) 有界非空开集 G 可以表示成有限多个或可列个互不相交的开区间的并：

$$G=\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_k,\ \beta_k),\quad \text{或者}\quad G=\bigcup_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k,\ \beta_k),$$

其中 $(\alpha_k,\ \beta_k)\cap(\alpha_j,\ \beta_j)=\emptyset(j\neq k)$ 时.

证明 (1) 设 $G_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 是一组以 Λ 为指标集的开集，我们求证 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 是开集. 若 $G=\emptyset$, 则结论显然成立. 若 $G\neq\emptyset$, 任取 $x\in G$, 则有 $\alpha_0\in\Lambda$, 使 $x\in G_{\alpha_0}$, 又因 G_{α_0} 是开集，故 x 是 G_{α_0} 的内点. 依内点定义，对这个 x 存在着 $(\alpha,\ \beta)\subset G_{\alpha_0}$, 使 $x\in(\alpha,\ \beta)$, 也即有 $x\in(\alpha,\ \beta)\subset G_{\alpha_0}\subset G$, 所以 x 也是 G 的内点. 由 x 在 G 中的任意性，结论 (1) 得证.

(2) 设 $G_k(1\leq k\leq n)$ 均为开集，我们求证 $G=\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k$ 也是开集. 若 $G=\emptyset$, 则结论显然成立. 若 $G\neq\emptyset$, 任取 $x\in G$, 则 $x\in G_k(1\leq k\leq n)$, 于是有 x 的 n 个邻域 $(\alpha_k,\ \beta_k)\subset G_k\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 使得 $x\in(\alpha_k,\ \beta_k)$. 我们令 $\alpha=\max\limits_{1\leq k\leq n}\alpha_k$, 令 $\beta=\min\limits_{1\leq k<n}\beta_k$, 显然 $(\alpha,\ \beta)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k,\ \beta_k)$. 又因 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{n}G_k=G$, 故 $x\in(\alpha,\ \beta)\subset G$, 这表明 x 是 G 的内点. 由 x 在

G 中的任意性，结论 (2) 得证.

(3) 任取 $x_0 \in G_0$. 我们首先证明存在开区间 (α,β)，使得 $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset G$，而且 α、$\beta \notin G$. 由开集的定义，对 x_0 点，存在开区间 (x, y)，使 $x_0 \in (x, y) \subset G_0$ 与确定的 x_0 相对应，有无限多个这样的开区间，记这些开区间的并为 U，显然 U 为一开区间，我们记为 (α, β). 可以证明，它是包含 x_0 且在 G 中最大的开区间. 事实上，若 (α, β) 不是，则一定有 (α_1, β_1) 存在，使 $(\alpha_1, \beta_1) \subset G$，而且 $\alpha_1 < \alpha$，或 $\beta_1 > \beta$. 另一方面，(α_1, β_1) 也是含在 G 中且含有 x_0 的一个开区间，应有 $(\alpha_1, \beta_1) \subset U - (\alpha, \beta)$，这个结论与 $\alpha_1 < \alpha$，或 $\beta_1 < \beta$ 相矛盾.

用反证法证明 α 及 $\beta \notin G$. 若 $\alpha \in G$，由于 α 是 G 的内点，便知有 $\delta > 0$ 使得 $(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset G$，从而 $(\alpha - \delta, \beta)$ 也是一个含 x_0 且在 G 中的开区间，但因 (α, β) 是含 x_0 且在 G 中的最大开区间，故应有 $(\alpha - \delta, \beta) \subset (\alpha, \beta)$，显然是不可能的，故 $\alpha \notin G$，同理可证 $\beta \notin G$. 具有上述性质的开区间 $(\alpha, \beta) \subset G$，叫做 G 的一个构成区间.

最后，我们证明 G 等于它的所有构成区间的并. 一方面，G 含有它的所有构成区间的并. 另一方面，G 的每一点都属于它的一个构成区间，从而属于它的所有构成区间的并，所以 G 就等于它的所有构成区间的并. G 的任意两个构成区间若有公共点，则必定重合，否则就不相交，因而 G 可以表示成一些互不相交的构成区间的并. 每一个构成区间可与在其中某一个有理数相对应，不同的构成区间所对应的有理数也不相同. 由于有理数集是可数集，所以 G 的构成区间的个数至多是可数的. (3) 证完.

注 (1) 无限个开集的交不一定是开集.

例如，$\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ 不是开集.

(2) 定理 1.34 中的 (3)，对无界开集也对. 这时构成区间除 (α, β) 型之外，还可以是 $(-\infty, +\infty)$，或 $(-\infty, \alpha)$，或 $(\beta, +\infty)$.

3. 开集的测度

我们将区间 (a, b)、$(a, b]$、$[a, b)$、$[a, b]$ 的长度 $b-a$，称为它们的**测度**，记作 $m(a, b)$、$m(a, b]$ 等等. 对一般的非空有界开集，根据定理 1.34(3)，我们自然可以用构成区间测度的和来定义测度.

定义 1.35 若开集 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{n}(\alpha_k, \beta_k)$，或 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k, \beta_k)$，其中 (α_k, β_k) 为 G 的构成区间（当 $i \neq j$ 时，$(\alpha_i, \beta_i) \cap (\alpha_j, \beta_j) = \emptyset$），则开

集 G 的测度　定义为

$$mG = \sum_{k=1}^{n}(\beta_k - \alpha_k), \quad \text{或者} \quad mG = \sum_{k=1}^{+\infty}(\beta_k - \alpha_k).$$

例 1.36　康托尔 (Cantor) 开集 G_0 定义如下：将 $[0,\ 1]$ 三等分，去掉中间的开区间 $(1/3, 2/3)$. 将剩下的 $[0, 1/3]$ 及 $[2/3, 1]$ 各三等分，并各去掉中间的开区间 $(1/3^2, 2/3^2)$, $(7/3^2, 8/3^2)$，再将剩下的 $[0, 1/3^2]$, $[2/3^2, 1/3]$, $[2/3, 7/3^2]$, $[8/3^2, 1]$ 各三等分，并分别去掉中间的开区间 (共四个)，按此步骤无限做下去，去掉的所有这些开区间的并记作 G_0. 由定理 1.34(1) 知 G_0 是开集，按定义其测度为

$$m\,G_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots + \frac{2^n}{3^{n+1}} + \cdots = 1.$$

4.　闭集及其测度

定义 1.37　若 $E \subset \mathbf{R}$ 的余集 E^c 是开集，则称 E 为 **闭集**.

例 1.38　因为 $\mathbf{R}^c = \emptyset$ 是开集，所以 $\mathbf{R}$ 是闭集. 因为 $\emptyset^c = \mathbf{R}$ 是开集，所以 $\emptyset$ 是闭集. 因为 $[a,\ b]^c = (-\infty,\ a) \cup (b,\ +\infty)$ 是开集，所以 $[a,\ b]$ 是闭集. 因为 $[a,\ +\infty)^c = (-\infty,\ a)$ 是开集，所以 $[a,\ +\infty)$ 是闭集.

例 1.39　实数集 $\mathbf{R}$ 的任意有限子集都是闭集.

证明　设 $E = \{a_k:\ \ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 为 $\mathbf{R}$ 的有限子集. 不失一般性，设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，则

$$E^c = (-\infty,\ a_1) \cup (a_1,\ a_2) \cup \cdots \cup (a_{n-1},\ a_n) \cup (a_n, +\infty).$$

由定理 1.34(1), E^c 是开集，所以 E 为闭集.

例 1.40　点列 $\{\frac{1}{n}\}$ 不是闭集.

证明　设 $\{1/n\} = E$，则

$$E^c = \left[\bigcup_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)\right] \bigcup (-\infty,\ 0] \bigcup (1,\ +\infty).$$

因 $0 \in E^c$，且 0 的任一邻域都有 E 中的点，所以 0 不是 E^c 的内点，故 E^c 不是开集，从而 E 不是闭集.

注　由闭集的定义直接可知：闭集的余集是开集. 还可以知道：开集的余集是闭集. 事实上，若 G 为开集，因 $(G^c)^c = G$，故 G^c 是闭集.

下面给出涉及闭集的若干命题，但略去其证明.

定理 1.41 E 是闭集的充分必要条件是 $\bar{E}=E$.

定理 1.42

(1) 任何集 E 的导集 E' 是闭集;

(2) 任何集 E 的闭包 $\overline{E}$ 是闭集.

定理 1.43 设 E 为 $\mathbf{R}$ 的真子集，则 E 为非空闭集的充要条件是：E 中任何收敛点列的极限都在 E 中.

定理 1.44

(1) 任意个闭集的交为闭集;

(2) 有限个闭集的并为闭集.

对闭集 F，如果有闭区间 $[a,\ b]$，使得 $F\subset[a,\ b]$，而且 $a,\ b\in F$，则称 $[a,\ b]$ 为含有闭集 F 的 **最小闭区间**.

定理 1.45 (有界闭集的结构定理) 非空有界闭集 F，假若不是闭区间，便是含有它的最小闭区间除去一个非空开集.

证明 由确界存在定理知 F 存在上确界和下确界. 令 $\alpha=\inf F$，$\beta=\sup F$. 我们可以证明，闭区间 $[\alpha,\ \beta]$ 便是 F 的最小闭区间. 可以证明 $\alpha\in F$. 其实，若 $\alpha\notin F$，因为 α 是 F 的下确界，α 必是 F 的聚点，即 $\alpha\in F'$，而 F 是闭集，从而有 $\alpha\in F$，得出矛盾，同理可证 $\beta\in F$. 于是有 $[\alpha,\ \beta]\backslash F=(\alpha,\ \beta)\backslash F=(\alpha,\ \beta)\cap F^c$，等式右边是开集 $(\alpha,\ \beta)$ 与开集 F^c 的交，故是一开集，令其为 G，这样一来便有

$$F=[\alpha,\ \beta]\backslash([\alpha,\ \beta]\backslash F)=[\alpha,\ \beta]\backslash G.$$

定义 1.46 设 F 为非空有界闭集，$[\alpha,\ \beta]$ 为含有它的最小闭区间，则因为 $F=[\alpha,\ \beta]\backslash G$ (其中 $G=[\alpha,\ \beta]\backslash F$ 为开集) 的原因，我们定义闭集 F 的测度 mF 为:

$$mF=m[\alpha,\ \beta]-mG=(\beta-\alpha)-mG.$$

例 1.47 试证明有限集的测度是 0.

证明 不失一般性，设 $E=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$，其中 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，最小闭区间为 $[a_1,\ a_n]$，$G=[a_1,\ a_n]-E=\bigcup_{k=1}^{n-1}(a_k,\ a_{k+1})$，故

$$mG=\sum_{k=1}^{n-1}m(a_k,\ a_{k+1})=\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_1.$$

所以，

$$mE = m[a_1, a_n] - mG = (a_n - a_1) - (a_n - a_1) = 0.$$

例 1.48　令 $P_0 = [0,\ 1]\backslash G_0$，其中 G_0 为康托尔开集. 因 $P_0 = [0,\ 1] \cap G_0^c$ 为两个闭集的交集，因此 P_0 是闭集，通常称为 **康托尔闭集**，试求 P_0 的测度.

解　因 $P_0 \subset [0,\ 1]$ 而且 $0 \in P_0$，$1 \in P_0$，故 $[0,\ 1]$ 为 P_0 的最小闭区间. 又因 $m\,G_0 = 1$，故 $m\,P_0 = m\,[0,1] - m\,G_0 = 1 - 1 = 0$.

5. 有界可测集

定义 1.49　有界集 $E \subset \mathbf{R}$ 的 **外测度** $m^* E$ 定义为：$m^* E = \inf\limits_{E\subset G} m\,G$，其中 G 是包含 E 的任意开集，特别地，对开集 G 来说，显然 $m^* G = m\,G$. 有界集 $E \subset \mathbf{R}$ 的内测度 $m_* E$ 定义为：$m_* E = \sup\limits_{F\subset E} m\,F$，其中 F 是被 E 包含的任意闭集，特别地，对闭集 F 来说，显然 $m_* F = m\,F$. 当 E 为有界集时，由确界存在性定理知，有下界的实数集 $\{m\,G:\ G \supset E,\ G\ 为开集\}$ 存在下确界，有上界的实数集 $\{mF:\ F \subset E,\ F\ 为闭集\}$ 存在上确界，所以对任意的有界集 E，其外测度 $m^* E$ 与内测度 $m_* E$ 都存在，且满足关系 $0 \le m_* E \le m^* E$.

例 1.50　试求开集 G 的内测度，并讨论开集与闭集的可测性.

设 $G = \bigcup_{k=1}^{n}(a_k,\ b_k)$，其中 $(a_k,\ b_k)$ 为构成区间 (若 G 有可列无限多个构成区间，则证明类似). 在 $(a_k,\ b_k)$ 内作闭区间 $[a_k + \frac{\varepsilon}{2^k}, b_k - \frac{\varepsilon}{2^k}]$($\varepsilon > 0$ 充分小，使得 $b_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} > 0$，$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$)，则闭集 $F_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n}[a_k + \frac{\varepsilon}{2^k},\ b_k - \frac{\varepsilon}{2^k}]$ 在 G 内，且

$$m\,F_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k-1}}) = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) - 2\varepsilon(1 - \frac{1}{2^n}).$$

显然当 ε 减小时，F_n 与 $m\,F_n$ 都增大，故

$$m_* G = \sup_{F\subset G} m\,F = \lim_{\varepsilon\to 0^+} m\,F_n = \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k).$$

于是我们对任意开集 G，有 $m\,G = m^* G = m_* G$. 同样可以证明，对任意闭集 F 也有 $m\,F = m^* F = m_* F$.

对于一般非开非闭的集，至此，只有内测度与外测度的概念，并没有测度概念．若它的内、外测度不相等，就无法定义测度了；若相等，则可定义如下：对有界集 $E\subset \mathbf{R}$，若 $m^*E=m_*E$，则称 E 为**勒贝格 (Lebesgue) 可测集**．定义 m^*E 或 m_*E 为 E 的**勒贝格测度**，简称**测度**，记作 mE．反之，若 $m_*E<m^*E$，则称 E 为不可测集．据此可知，开集、闭集都是可测集．

例 1.51　(非开、非闭可测集) 讨论 $[0,\ 1]$ 中有理数集 Q_0 的可测性．

因为 Q_0 是可列集，可以设 $Q_0=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\}$．作开区间 $(a_k-\varepsilon/2^k, a_k+\varepsilon/2^k)$，它们的并仍然是开集，我们记作 G_ε，则有

$$G_\varepsilon=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k-\frac{\varepsilon}{2^k},\quad a_k+\frac{\varepsilon}{2^k}),\qquad \varepsilon>0.$$

从而

$$m^*Q_0\le\inf_{\varepsilon>0}(m\,G_\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0^+}(m\,G_\varepsilon)\le\lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{k-1}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}2\varepsilon=0.$$

于是

$$0\le m_*Q_0\le m^*Q_0\le 0,$$

故 $m\,Q_0=0$．

类似于以上的例子可以证明下述定理．

定理 1.52　任意有界的可列集都是可测集并且测度为零．

注　此定理的逆命题不成立．例如康托尔闭集 $P_0=[0,\ 1]\backslash G_0$，$m\,P_0=0$，但 P_0 是不可列的无限集．

自然提出这样的问题，是否存在不可测集呢？回答是肯定的，但是由于可测集是如此之多，因此我们并不因为有不可测集而感到不便．当然，要构造出一个不可测集的例子是困难的，此方面的有关例子可以参考实分析的有关专著．

6．无界可测集

对于无界集 E，若它与任意开区间的交是可测的，则称 E 为**可测集**，定义其测度为

$$m\,E=\lim_{n\to+\infty}m\,((-n,\ n)\cap E).$$

注

(1) 无界集的测度可以是有限数，也可以是 $+\infty$；

(2) 一般凡提到可测集，意味着 $mE<+\infty$，或 $mE=+\infty$. 若 $mE<+\infty$，则称 E 为**有限可测集**. 若 $mE=+\infty$，则称 E 为**无限测度集**.

定理 1.53 测度具有以下的性质：

(1) 非负性： 若 E 可测，则 $mE\geq 0$;

(2) 单调性： 若 $E_1\subset E_2$，E_1，E_2 都可测，则有 $mE_1\leq mE_2$;

(3) 并、交、差运算的封闭性： 若 E_1、E_2 可测，则 $E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2$，$E_1\backslash E_2$，$E_2\backslash E_1$ 均可测;

(4) 有限可加性： 若 E_1、E_2，$\cdots$，E_n 可测，并且当 $i\neq j$ 时 $E_i\cap E_j=\emptyset\,(1\leq i,\ j\leq n)$，则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n}E_k\right)=\sum_{k=1}^{n}mE_k;$$

(5) 次可加性： 若 E_1，E_2，$\cdots$ 可测，则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k\right)\leq\sum_{k=1}^{+\infty}mE_k;$$

(6) 完全可加性： 若 E_1，E_2，$\cdots$ 可测，并且当 $i\neq j$ 时有 $E_i\cap E_j=\emptyset$，则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}mE_k;$$

(7) 若 $E_k\subset E_{k+1}\,(k=1,\ 2,\ \cdots)$，则有

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k\right)=\lim_{n\to+\infty}mE_n;$$

(8) 若 $E_k\supset E_{k+1}\,(k=1,\ 2,\ \cdots)$ 而且 $mE_1<+\infty$，则有

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}E_k\right)=\lim_{n\to+\infty}mE_n.$$

§1.7 可 测 函 数

1. 可测函数的概念

设 E 是 $\mathbf{R}$ 的一个可测子集 (有界或无界)，f 是定义在 E 上的实函数，它的值允许取无穷大. 设 α 是一个实数，定义 E 的子集 $E(f>\alpha)$ 为

$$E(f>\alpha):=\{x:\ \ x\in E,\ f(x)>\alpha\}=f^{-1}((\alpha,+\infty)).$$

类似地可以定义 $E(f>\alpha)$、$E(\alpha<f<\beta)$ 等. 注意，这些集合的性质反映出函数的性质.

定义 1.54　设函数 $f:\ E\subset\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, 其中 E 为可测集. 若对每个 $\alpha\in\mathbf{R}$, 集合 $E(f>\alpha)$ 均为可测集，则称 $f(x)$ 为定义在 E 上的 **可测函数**.

例 1.55

(1) 0 测度集上的函数是可测函数.

(2) 定义在区间 $[0,1]$ 上的狄利克雷 (Dirichlet) 函数为

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\ 1]\cap\mathbf{Q},\\ 0, & x\in[0,\ 1]\backslash\mathbf{Q}.\end{cases}$$

这时我们有

$$E(\phi>\alpha)=\begin{cases}[0,\ 1], & \alpha<0,\\ \mathbf{Q}\cap[0,\ 1], & 0\le\alpha<1,\\ \emptyset, & \alpha\ge 1.\end{cases}$$

因为集合 $[0,\ 1],\mathbf{Q}\cap[0,\ 1],\emptyset$ 都是可测集，因此对任意的 $\alpha\in\mathbf{R}$, $E(\phi>\alpha)$ 均为可测集，故 $\phi(x)$ 是可测函数.

(3) $[0,\ 1]$ 上的函数 $f(x)=2x$ 是可测函数. 此时

$$E(f>\alpha)=\begin{cases}[0,\ 1], & \alpha<0,\\ (\frac{\alpha}{2},\ 1], & 0\le\alpha<2,\\ \emptyset, & \alpha\ge 2.\end{cases}$$

由此可以看出对任一 $\alpha\in\mathbf{R}$, $E(f>\alpha)$ 都是可测集，因而 $f(x)$ 是可测函数.

(4) 简单函数：　函数 $f:\ E\subset\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, 若仅取有限个函数值，并且每一个函数值的逆像均为可测集，则称 $f(x)$ 为 **简单函数**. 不难证明简单函数都是可测函数.

(5) 特征函数：　设 F 是可测集 E 的子集，则称定义在 E 上的函数

$$\chi_F(x)=\begin{cases}1, & x\in F,\\ 0, & x\in E\backslash F.\end{cases}$$

为集 F 的**特征函数**. 此时

$$E(\chi_F > a) = \begin{cases} \emptyset, & \alpha \geq 1, \\ F, & 0 \leq \alpha < 1, \\ E, & \alpha < 0. \end{cases}$$

由此可见 $\chi_F(x)$ 为可测函数的充要条件是 F 为 E 的可测子集.

注 简单函数总能用可测的特征函数来线性表示.

2. 可测函数的性质

定理 1.56 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数, 则对任意的 α, $\beta \in \mathbf{R}$, 集合 $E(f \geq \alpha)$; $E(f = \alpha)$; $E(f < \alpha)$; $E(\alpha \leq f < \beta)$; $E(f \leq \alpha)$; $E(\alpha < f \leq \beta)$ 都是可测集.

定理 1.57 设 $E \subset \mathbf{R}$ 是一可测集, 则函数 f: $E \longrightarrow \mathbf{R}$ 可测的充要条件是: 对所有的 α, β, 下列四类集合至少有一类始终为可测集

$$E(f \geq \alpha),\ E(f \leq \alpha),\ E(f < \alpha),\ E(\alpha \leq f < \beta).$$

定理 1.58 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的可测函数, 则

(1) 若 A 是 E 的可测子集, 则 $f(x)$ 也是 A 上的可测函数;

(2) 若函数 $g(x)$ 与 $f(x)$ 在 E 上几乎处处相等, 则 $g(x)$ 也是可测函数;

(3) $|f(x)|$ 也是 E 上的可测函数;

(4) 若 $g(x)$ 也是定义在 E 上的可测函数, 则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ $(g(x) \neq 0)$ 都是可测函数;

证明 (1) 因为 $A(f > \alpha) = A \cap E(f > \alpha)$, 且其中 A 与 $E(f > \alpha)$ 都是可测集, 故其交也可测, 所以 $f(x)$ 在 A 上是可测函数;

(2) 因为

$$\begin{aligned} E(g > \alpha) &= E(g > \alpha) \cap (E(g = f) \cup E(g \neq f)) \\ &= (E(g > \alpha) \cap E(g = f)) \cup (E(g > \alpha) \cap E(g \neq f)), \end{aligned}$$

其中等式右边的并中, 第一个并因子 $E(g > \alpha) \cap E(g = f) = E(f > \alpha) \cap E(g = f)$, 它是可测集 $E(f > \alpha)$ 与可测集 $E(g = f)$ (其测度与 E 相同) 的交, 故是可测集. 第二个并因子 $E(g > \alpha) \cap E(g \neq f)$ 是 0 测度集 $E(g \neq f)$ 的子集, 也是可测集, 所以 $E(g > \alpha)$ 也是可测集.

(3) 由

$$E(|f|>\alpha)=\begin{cases} E, & \alpha<0,\\ E(f>0)\cup E(f<0), & \alpha=0,\\ E(f>\alpha)\cup E(f<-\alpha), & \alpha>0,\end{cases}$$

可知，对任一 $\alpha\in\mathbf{R}, E(|f|>\alpha)$ 是可测集.

(4) 的证明从略.

3. 可测函数与连续函数的关系

我们先把定义在区间上的连续函数概念扩充到任意集 $E\subset\mathbf{R}$ 上.

定义 1.59 对函数 $f:\ E\subset\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}, x_0\in E$, 若有

$$\lim_{x\to x_0,x\in E}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ **在点** x_0 **连续**. 这种定义与下列 (1)~(5) 分别等价:

(1) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in E$ 而且 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

(2) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in E\cap B(x_0,\ \delta)$ 时，有 $f(x)\in B(f(x_0),\ \varepsilon)$;

(3) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $E\cap B(x_0,\ \delta)\subset f^{-1}(B(f(x_0),\ \varepsilon))$;

(4) 对 $f(x_0)$ 的任意邻域 $(a,\ b)$, 存在 x_0 的某一邻域 $(\alpha,\ \beta)$, 只要 $x\in E\cap(\alpha,\ \beta)$, 便有 $f(x)\in(a,\ b)$;

(5) 对任意的点列 $\{x_n\}\subset E$, 只要 $x_n\longrightarrow x_0(n\to+\infty)$ 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x_0)$.

按定义知，任何函数在其定义域内的每一个孤立点 x_0 连续. 因为这时只要 δ 充分小，便有

$$E\cap B(x_0,\ \delta)=\{x_0\},$$

故 $x\in E\cap B(x_0,\ \delta)$ 时， $|f(x)-f(x_0)|=|f(x_0)-f(x_0)|=0<\varepsilon$, 对任意的 $\varepsilon>0$ 都成立.

若 $f(x)$ 在定义域 E 的每一点连续，则称 $\boldsymbol{f(x)}$ **是** $\boldsymbol{E}$ **上的连续函数**. 连续函数与可测函数的关系如下:

定理 1.60 定义在可测集上的连续函数都是可测函数.

可测函数概念是否概括了所有函数呢？回答是否定的.

例 1.61　设 A 是 $\mathbf{R}$ 中的不可测集，则 A 的特征函数 $\chi_A(x)$ 是一个不可测函数.

定理 1.62 (鲁金定理)　设 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则

(1) 对任一 $\delta>0$, 存在闭子集 $F_\delta\subset E$, 使 $f(x)$ 在 F_δ 上连续，而且 $m(E\backslash F_\delta)<\delta$;

(2) 对任一 $\delta>0$, 存在一个定义在 E 上的连续函数 $g(x)$, 满足 $mE(f\neq g)<\delta$, 特别地，当 $|f(x)|\leq M$ 时，则可取上面的 $g(x)$ 满足 $|g(x)|\leq M$.

注　此定理表明，可测函数是一种基本上连续的函数. 定理的证明可参考其他实变函数论教材. "几乎处处 P" 是指除一个零测度集外命题 P 处处成立. "几乎处处" 常用 a.e. 表示. 比如，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上几乎处处相等是指在集合 E 上除了一个零测度集 E_0 外处处相等，即 $\forall x\in E\backslash E_0$ 有，$f(x)=g(x)$, 记作 $f=g$ a.e..

4. 测度收敛的概念

对函数列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛性，现已学过的有 (1) $f_n(x)$ 在 $E\subset\mathbf{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$. (2) $f_n(x)$ 在 $E\subset\mathbf{R}$ 上收敛于 $f(x)$. (3) $f_n(x)$ 在 $E\subset\mathbf{R}$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$. 这些概念有下述关系：(1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3).

下面介绍一种更弱的收敛概念.

定义 1.63　设 $f_n(x)\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$, $f(x)$ 都是可测集 E 上的可测函数. 若对任意给定的 $\sigma>0$, 都有

$$\lim_{n\to+\infty} mE(|f_n-f|\geq\sigma)=0,$$

则称 **$f_n(x)$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$**, 记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$(按测度), 或 $f_n(x)\overset{m}{\Rightarrow}f(x)$. 我们知道，当 n 固定时，对确定的误差 σ, 将定义域 $E\subset\mathbf{R}$ 中的点分为两类. 一类使得 $|f_n(x)-f(x)|<\sigma$, 另一类使得 $|f_n(x)-f(x)|>\sigma$. 它们分别属于 E 的子集 $E(|f_n-f|<\sigma)$ 及 $E(|f_n-f|\geq\sigma)$. 测度收敛表示第一个集合的测度收敛于 mE, 第二个集合的测度收敛于 0 (当 $n\to+\infty$ 时), 这个结论对无论多么小的 σ, 总是对的.

注

(1) 测度收敛与其他收敛的关系："f_n 一致收敛于 f" $\Longrightarrow$ "f_n 收敛于 f" $\Longrightarrow$ "f_n 几乎处处收敛于 f";

"f_n(几乎处处有限) 几乎处处收敛于 f(几乎处处有限)($+mE<+\infty$)" $\Longrightarrow$ "f_n 按测度收敛于 f" $\Longrightarrow$ "存在 f_n 的子列 f_{n_k} 几乎处处收敛于 f".

(2) 测度收敛比起通常的收敛要弱许多.

若 $mE=+\infty$, 则几乎处处收敛的函数列也可以不依测度收敛.

例 1.64　若 $E=(0,\ +\infty)$, 作函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,\ n],\\ 0, & x\in(n,\ +\infty).\end{cases}$$

其中 $n=1,\ 2,\ \cdots$. 显然 $f_n(x)\longrightarrow 1\,(x\in E,\ n\to+\infty)$. 但当 $0<\sigma<1$ 时,

$$E(|f_n-1|\geq\sigma)=(n,\ +\infty),\ \ mE(|f_n-1|\geq\sigma)=+\infty\not\longrightarrow 0\,(n\to+\infty),$$

故不成立 $f_n\xrightarrow{m}1(n\to+\infty)$, 即 $f_n(x)$ 不依测度收敛于 1.

§1.8　勒贝格 (Lebesgue) 积分简介

1.　黎曼 (Riemann) 积分

定义 1.65 (黎曼积分)　设 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上有定义并且有界. 对 $[a,\ b]$ 作任意一种分划:

$$\Delta:\ \ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

在每一子区间 $[x_{k-1},\ x_k]$ 中任取一点 $\xi_k(1\leq k\leq n)$, 作积分和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k,\qquad \Delta x_k=x_k-x_{k-1},$$

若不论 $[a,\ b]$ 如何分划, 也不论 ξ_k 在 $[x_{k-1},\ x_k]$ 中如何选取, 都有确定的数 $A\in\mathbf{R}$ 存在, 使得

$$\lim_{d(\Delta)\to 0}\sigma=A,$$

其中 $d(\Delta)=\max\{\Delta x_k\}$, 则称 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上 **黎曼可积**, A 称为 **黎曼积分值**, 记作

$$A=(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

即有

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{d(\Delta)\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

定义 1.66 设 $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},\ x_k]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},\ x_k]} f(x)$, 我们称它们的差 $\omega_k = M_k - m_k$ 为 $f(x)$ 在区间 $[x_{k-1},\ x_k]$ 上的 **振幅**, 称

$$s_\Delta = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k, \qquad S_\Delta = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k,$$

分别为 **达布小和** 与 **达布大和**. 显然 s_Δ 和 S_Δ 都与 $[a,\ b]$ 的分划 Δ 有关. 对 $[a,\ b]$ 的同一分划 Δ, 显然有

$$s_\Delta \le \sigma \le S_\Delta, \qquad 0 \le \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = S_\Delta - s_\Delta.$$

当对 $[a,\ b]$ 的分划越来越细时, S_Δ 单调减小, 而 s_Δ 单调增加, 而且

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} S_\Delta = \inf_\Delta\{S_\Delta\}, \quad \lim_{d(\Delta)\to 0} s_\Delta = \sup_\Delta\{s_\Delta\},$$
$$0 \le \lim_{d(\Delta)\to 0} \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = \lim_{d(\Delta)\to 0} (S_\Delta - s_\Delta),$$
$$\lim_{d(\Delta)\to 0} s_\Delta \le \lim_{d(\Delta)\to 0} S_\Delta.$$

定理 1.67 下述各条等价:

(1) $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上黎曼可积;

(2) $\lim\limits_{d(\Delta)\to 0} s_\Delta = \lim\limits_{d(\Delta)\to 0} S_\Delta$;

(3) $\sup\limits_\Delta\{s_\Delta\} = \inf\limits_\Delta\{S_\Delta\}$;

(4) $\lim\limits_{d(\Delta)\to 0} \sum\limits_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = 0$.

注 此定理给出黎曼积分的等价定义: 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,\ b]$ 上的有界函数, 对 $[a,b]$ 作分划, 得到达布大和 S_Δ 与达布小和 s_Δ, 对一切可能的分划 Δ, 若有

$$\sup_\Delta\{s_\Delta\} = \inf_\Delta\{S_\Delta\},$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上黎曼可积, 其积分值为 $\sup\limits_\Delta\{s_\Delta\}$ 或 $\inf\limits_\Delta\{S_\Delta\}$.

2. 黎曼可积函数类

定理 1.68

(1) $[a,b]$ 上的连续函数黎曼可积;

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界且至多有有限个间断点, 则 $f(x)$ 黎曼可积;

(3) $[a,b]$ 上的单调有界函数黎曼可积.

例 1.69 (不可积函数的例子) 设 $[0,1]$ 上的狄利克雷型函数为

$$f(x)=\begin{cases}3, & x\in\mathbf{Q}\cap[0,1],\\ 2, & x\in[0,1]\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$$

对 $[0,1]$ 作分划, 若取 ξ_k 为 $[x_{k-1},x_k]$ 中的有理数, 则有

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}3\,\Delta x_k=3\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=3,$$

若取 ξ_k 为 $[x_{k-1},x_k]$ 中的无理数, 则有

$$\sigma_2=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\,\Delta x_k=2,$$

所以 $\lim\limits_{d(\Delta)\to 0}\sigma$ 不存在, 由黎曼积分的定义 1.65 直接知 $f(x)$ 不可积.

注 黎曼积分是为连续函数以及几乎处处连续的函数而设计的. 一般地, $[a,b]$ 上的有界函数 $f(x)$ 黎曼可积, 当且仅当 $f(x)$ 的一切不连续点集的测度是 0. 狄利克雷型函数所对应的曲边梯形作为 $\mathbf{R}^2$ 的子集, 应该在平面上占有一定的面积, 若说它没有面积, 是不可能的. 造成这种情形的原因只能是主观方面的, 也就是面积的这种数学定义方法不够合理. 解决的办法只能是修正积分定义, 使得它具有更广泛的适应性.

下面将按照如下次序来介绍勒贝格积分: (1) 有限可测集上有界可测函数的勒贝格积分. (2) 有限可测集上无界可测函数的勒贝格积分. (3) 无限测度集上可测函数的勒贝格积分.

3. 有限可测集上有界可测函数的勒贝格积分

定义 1.70 设 $f(x)$ 为有限可测集 $E\,(mE<+\infty)$ 上的有界函数, 对 E 作任意一种分划 L, 也就是把集 E 分成 n 个互不相交的可测子集 $E_k\,(1\le k\le n)$

$$E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k,\quad E_i\bigcap E_j=\emptyset\,(i\neq j,\ 1<i,\ j\le n),$$

设 $M_k=\sup_{x\in E_k} f(x)$，$m_k=\inf_{x\in E_k} f(x)$，$\omega_k=M_k-m_k$ (ω_k 为 $f(x)$ 在 E_k 上的振幅). 我们分别称

$$s_L=\sum_{k=1}^{n} m_k\, m\,E_k,\quad S_L=\sum_{k=1}^{n} M_k\, m\,E_k,$$

为 **勒贝格小和** 与 **勒贝格大和**. 显然 s_L 和 S_L 都与 E 的分法有关，而且 $s_L\le S_L$. 容易知道，对 E 的分划越来越细时 (指 $d(L)=\max\limits_{1\le k\le n}\{m\,E_k\}$ 越来越小时)，S_L 单调减小而 s_L 单调增加，而且

$$\lim_{d(L)\to 0} S_L=\inf\{S_L\},\quad \lim_{d(L)\to 0} s_L=\sup\{s_L\}.$$

又因为

$$0\le \lim_{d(L)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k m\,E_k=\lim_{d(L)\to 0}(S_L-s_L)=\lim_{d(L)\to 0} S_L-\lim_{d(L)\to 0} s_L,$$

故

$$\lim_{d(L)\to 0} s_L\le \lim_{d(L)\to 0} S_L.$$

即

$$\sup\{s_L\}\le \inf\{S_L\}.$$

若有 $\sup\{s_L\}=\inf\{S_L\}$，则称 $f(x)$ 在 E 上**勒贝格可积**，称数值 $\sup\{s_L\}$ (即 $\inf\{S_L\}$) 为 $f(x)$ 在 E 上的 **勒贝格积分值**，记作

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,m,\quad 或\quad (L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,m,$$

特别地，当 E 是区间 $[a,b]$ 时，可记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,m$，在不会误解的地方也可以记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

例 1.71　计算例 1.69 中狄利克雷型函数的勒贝格积分.

解　对 $[0,\ 1]$ 作分划 $A=A_1\cup A_2$，使得 $A_1=\{x:\ f(x)=3\}=[0,\ 1]\cap\mathbf{Q}$，使得 $A_2=\{x:\ f(x)=2\}=[0,1]\backslash\mathbf{Q}$. 于是 $m\,A_1=$

0, $m\,A_2=1$, $m_1=M_1=3$, $m_2=M_2=2$, 对应这种分划的勒贝格小和与勒贝格大和分别为

$$s'_L=m_1(m\,A_1)+m_2(m\,A_2)=3\times 0+2\times 1=2,$$
$$S'_L=M_1(m\,A_1)+M_2(m\,A_2)=3\times 0+2\times 1=2,$$

所以 $2=s'_L\le\sup\{s_L\}\le\inf\{S_L\}\le S'_L=2$, 故有 $\sup\{s_L\}=\inf\{S_L\}=2$, 即

$$(L)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,m=2.$$

例 1.72 试求定义在有限可测集 E 上的简单函数 $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\,\chi_{E_k}(x)$ 的勒贝格积分, 其中 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k$, $E_i\bigcap E_j=\emptyset\,(i\ne j)$, $\chi_{E_k}(x)$ 为 E_k 上的特征函数, E_k 为 E 的可测子集.

解 将 E 分划为 E_1, E_2, $\cdots$, E_n, 令对应的勒贝格大和与勒贝格小和为 S'_L 与 s'_L, 因为 $m_k=M_k=c_k$, 故 $S'_L=s'_L=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\,m\,E_k$, 但是

$$s'_L\le\sup\{s_L\}\le\inf\{S_L\}\le S'_L,$$

所以 $\sup\{s_L\}=\inf\{S_L\}=s'_L$, 依定义得

$$(L)\int_E S(x)\,\mathrm{d}\,m=\sum_{k=1}^{n}c_k\,m\,E_k.$$

定理 1.73 若有界函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上是黎曼可积的, 则它一定也是勒贝格可积的, 并且有

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=(L)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,m.$$

注 对 $[a,\ b]$ 上的有界函数来说, 黎曼可积函数类是勒贝格可积函数类的真子集. 引入勒贝格积分后使得原来黎曼不可积的某些函数成为可积的(在勒贝格积分意义下). 由定理还可知, 计算连续函数以及其他黎曼可积函数的勒贝格积分, 也就是计算它们的黎曼积分. 值得指出的是, 勒贝格积分的重要性是在理论上, 一般并不存在计算的问题.

定理 1.74 设 $f(x)$ 是定义在有限可测集 E 上的有界函数，则 $f(x)$ 勒贝格可积的充要条件是 $f(x)$ 为 E 上的可测函数.

4. 有限可测集上无界可测函数的勒贝格积分

以上讨论的是有限可测集上有界可测函数的勒贝格积分. 下面将定义有限可测集上无界可测函数的勒贝格积分. 我们首先定义有限可测集上非负无界可测函数的勒贝格积分.

定义 1.75 (有限可测集上非负无界函数的勒贝格积分) 设 $f(x)$ 是有限可测集 E 上的非负无界可测函数，作有界可测函数列 $\{f_n(x)\}$

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & x\in E(f<n),\\ n, & x\in E(f\geq n),\end{cases}$$

则定义 $f(x)$ 在 E 上的勒贝格积分为

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}m=\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}m.$$

若上述极限为有限值，则称 $f(x)$ 在 E 上 **勒贝格可积**，这时把这个极限值称为 $f(x)$ 在 E 上的 **勒贝格积分值**.

注 此定义对非负有界可测函数仍然成立.

因 $f_n(x)\geq 0$ 在 E 上对每个 n 都是勒贝格可积的，而且 $f_n(x)\leq f_{n+1}(x)\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$，故 $\left\{\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}m\right\}\subset\mathbf{R}$ 是一单调增加的非负数列，因此，当 $n\to+\infty$ 时，其极限要么存在，要么为 $+\infty$，不会有第三种情况发生，所以若有

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}m<+\infty,\quad f(x)\geq 0,$$

那么 $f(x)$ 在 E 上一定勒贝格可积.

设 $f(x)$ 是有限可测集 E 上的无界可测函数，我们引入 E 上的两个非负函数

$$f_+(x)=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x)),\quad f_-(x)=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x)).$$

显然，

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x).$$

若 $f_+(x)$ 与 $f_-(x)$ 都是勒贝格可积的，则称 $f(x)$ 在 E 上 **勒贝格可积**，并且定义其 **勒贝格积分值** 为

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,m = \int_E f_+(x)\,\mathrm{d}\,m \quad \int_E f_-(x)\,\mathrm{d}\,m.$$

注 上面的定义对有界可测函数也成立.

定义 1.76 定义在区间 $[a,\ b]$ 上的所有勒贝格可积函数 (无论有界还是无界) 的全体，称为 **勒贝格可积函数类**，记作 $L^1([a,\ b])$，简单记作 $L([a,\ b])$.

5. 无限测度集上可测函数的勒贝格积分

定义 1.77 (无限测度集上的勒贝格积分) 设 $E \subset \mathbf{R}$ 为无界集，并且设 $m\,E = +\infty$，$f(x)$ 是 E 上的可测函数，我们令 $\Delta_n = [-n,\ n]\,(n = 1,\ 2,\ \cdots)$，当

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\Delta_n\cap E} f_+(x)\,\mathrm{d}\,m, \quad 与 \quad \lim_{n\to+\infty}\int_{\Delta_n\cap E} f_-(x)\,\mathrm{d}\,m,$$

均为有限时，称 $f(x)$ 在 E 上 **勒贝格可积**，并定义其 **积分值** 为它们二者之差，也即有

$$(L)\int_E f(x)\,\mathrm{d}\,m = \lim_{n\to+\infty}\int_{\Delta_n\cap E} f(x)\,\mathrm{d}\,m.$$

注 (1) 由此定义可知，在无限测度集上的勒贝格广义积分概念，并非在无限区间上的黎曼广义积分概念的推广.

(2) 一般地说，$[a,\ b]$ 上黎曼可积函数也是勒贝格可积的，且两种积分相等.

(3) 在 $(a,\ b)$ 上无界函数和无限区间上函数的黎曼广义积分存在，不一定能保证是勒贝格可积的. 例如黎曼广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 存在，有可能 $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}\,x = +\infty$ (发散)，但对勒贝格积分而言，$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 可积，必需有 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x$ 是有限值，而且 $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}\,x < +\infty$. 但如果可测函数 $f(x)$ 的绝对值函数 $|f(x)|$ 的黎曼广义积分存在，则 f 是勒贝格可积的，而且其勒贝格积分值等于其黎曼广义积分.

例 1.78 试证明

$$(R)\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}, \tag{1.8.1}$$

但 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上不是勒贝格可积的.

证明 作辅助函数

$$I(\alpha, \beta) = (R)\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin \beta x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha > 0,$$

两边关于 β 求导可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \beta}I(\alpha,\beta) &= \int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial \beta}(\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin \beta x}{x})\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos \beta x\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.\end{aligned}$$

积分得

$$I(\alpha,\beta) = \arctan\frac{\beta}{\alpha} + c.$$

令 $\beta = 0$, 因为 $I(\alpha,\beta) = 0$, 故 $c = 0$, 所以

$$I(\alpha,\beta) = \arctan\frac{\beta}{\alpha}.$$

取 $\beta = 1$, 令 $\alpha \to 0^+$, 便得 (1.8.1) 的证明.

用反证法证明 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上不是勒贝格可积的. 设 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上勒贝格可积, 由绝对可积性 $\frac{\sin x}{x}$ 必绝对可积, 故有

$$\begin{aligned}(L)\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{+\infty}(L)\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(R)\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(R)\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{n\pi + x}\,\mathrm{d}x \\ &\geq \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(n+1)\pi}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)\pi} = +\infty.\end{aligned}$$

6. 勒贝格积分的性质

用 $L^1(E)$ 表示可测集 E 上所有勒贝格可积函数组成的集合.

定理 1.79 (勒贝格积分的性质)

(1) 线性性质: 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在可测集 E 上勒贝格可积, α,β 是两个数, 则 $\alpha f(x)\pm\beta g(x)$ 在集 E 上勒贝格可积, 而且有

$$\int_E(\alpha f(x)\pm\beta g(x))\,\mathrm{d}x=\alpha\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\pm\beta\int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 可加性:

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{E_k}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 E_k 为 E 的可测子集, $E=\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}E_k$, $E_i\cap E_j=\emptyset\,(i\neq j)$.

(3) 单调性: 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在集 E 上勒贝格可积且 $f(x)\leq g(x)$ $a.e.$, 则有

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\leq\int_E g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 若有 $c\leq f(x)\leq d$, 则

$$c\cdot mE\leq\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\leq d\cdot mE.$$

(4) 若 $f(x)$, $g(x)\in L^1(E)$ 是有界的, 而且 $mE<+\infty$, 则 $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, (但 $\inf\limits_{x\in E}|g(x)|>0$) 在 E 上都是勒贝格可积的.

(5) 如果在 E 上几乎处处 $f=0$, 则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

(6) 如果 $f(x)$ 是可测集 E (有限可测或 $mE=+\infty$) 上的可测函数, 则 $f(x)$ 是勒贝格可积的, 当且仅当 $|f(x)|$ 是勒贝格可积的.

(7) 如果 $f(x), g(x)\in L^1(E)$ 且在 E 上 $f(x)=g(x)$ $a.e.$, 则两者的勒贝格积分相等.

(8) $\displaystyle\int_E|f(x)|\,\mathrm{d}x=0$, 当且仅当在 E 上 $f(x)=0$ $a.e.$.

(9) 如果 $f(x)\in L^1(E)$, 则

$$\left|\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_E|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(10) (绝对连续性) 若 $f(x)\in L^1(E)$，则对任意给定的 ε，始终存在 $\delta>0$，使得当 $e\subset E$，而且 $me<\delta$ 时，便有

$$\left|\int_e f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

定理 1.80 设 $f(x)$ 和 $u_n(x)\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 都是 E 上的非负可测函数，而 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$，则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_E u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 以上定理没有假定 $f(x)$ 是勒贝格可积的. 假若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int_E u_n(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，就可以断言 $f(x)$ 可积，因而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$ 几乎处处有限.

定理 1.81 (Levi) 设 $f_n(x)\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 是可测集 E 上的非负可测函数列. 若

$$f_1(x)\le f_2(x)\le f_3(x)\le\cdots,$$

而且

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)\ a.e.,$$

则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

注 Levi 定理中需要假设一切 $f_n(x)\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 均可积，当出现某个 $f_n(x)$ 不可积时，所要证明的等式两边都成为 $+\infty$，当极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x$ 存在时，则可以断言 $f(x)$ 勒贝格可积.

定理 1.82 (Fatou 引理) 设 $f_n(x)\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 是可测集 E 上的非负可测函数列，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)\ a.e.$，则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x\le\sup_n\{\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x\}.$$

定理 1.83 (勒贝格控制收敛定理) 设 $f_n(x)\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 是可测集 E 上的可测函数列，$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)\ \ a.e.$，若存在 E 上的勒贝格可积函数 $F(x)$，使得

$$|f_n(x)|\le F(x),\quad n=1,\ 2,\ \cdots,\ \ x\in E\ \ a.e.,$$

则 $f(x)$ 在 E 上勒贝格可积且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\,\mathrm{d}x.$$

注　此定理在函数论、微分方程和概率论等学科有重要应用. 勒贝格积分的相关结论还可以推广到多元函数的情况.

7. 有界变差函数、绝对连续函数

回顾高等数学中微积分基本定理：函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 具有连续的导函数，当且仅当

$$f(t)=f(a)+\int_a^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $\varphi:[a,b]\to\mathbf{R}$ 连续.

为了将此基本定理推广到勒贝格积分中，先介绍有界变差函数的概念. 设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，对于区间 $[a,b]$ 的任意一种分划

$$\Delta:\quad a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,$$

我们称

$$\sum_{k=1}^{n}|f(t_k)-f(t_{k-1})|,$$

为 $f(t)$ 关于分划 Δ 的 **变差**, 记作 $\bigvee_a^b(f,\Delta)$. 并且称 $\sup\limits_{\Delta}\bigvee_a^b(f,\Delta)$ 为 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上的 **全变差**, 记作 $\bigvee_a^b(f)$. 当 $\bigvee_a^b(f)<+\infty$ 时，称 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 **有界变差函数**.

定理 1.84

(1) 设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，$c\in[a,b]$, 则 $f(t)$ 也是 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的有界变差函数. 反之亦然. 此时，有 $\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$.

(2) 设 $f(t),g(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，对于任何两个数 α,β, 则 $\alpha f(t)+\beta g(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

(3) $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，当且仅当 $f(t)$ 可以表示成两个单调增加函数的差.

(4) 设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增加函数，则 $f'(t)$ 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积，且有

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\le f(b)-f(a).$$

(5) 设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处有有限导数 $f'(t)$，而且 $f'(t)$ 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积.

注 单调函数是有界变差函数，因此，有界变差函数不一定是连续函数. 此外，连续函数也不一定是有界变差函数. 例如函数

$$f(t)=\begin{cases} t\cos\frac{\pi}{t}, & 0<t\leq 1, \\ 0, & t=0. \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上连续，我们将说明它不是有界变差函数. 如果取 $[0,1]$ 一个特殊的分划，

$$0<\frac{1}{k-1}<\frac{1}{k-2}<\cdots<\frac{1}{2}<1,$$

则

$$\bigvee_0^1(f,\Delta)=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k-1}\right)-1,$$

因此，$\bigvee_0^1(f)=+\infty$.

设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，如果对于任意的 $\varepsilon>0$，始终存在 $\delta>0$，对 $[a,b]$ 中的任意有限个互不相交的开区间 $(a_k,b_k)(k=1,2,\cdots,n)$，只要 $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$，就有

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon,$$

则称 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 **绝对连续函数**.

定理 1.85

(1) 绝对连续函数必是一致连续的，并且两个绝对连续函数的和、差、积都是绝对连续函数；

(2) $[a,b]$ 上的绝对连续函数是有界变差函数；

(3) 设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，而且 $f(t)$ 的导函数 $f'(t)$ 几乎处处为零，则 $f(t)$ 为常数；

(4) 设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的勒贝格可积函数，则不定积分 $\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s+c$ 为绝对连续函数；

(5) 如果 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上勒贝格可积，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s=f(t)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处成立；

(6) $[a,b]$ 上的函数 $f(t)$ 为绝对连续函数，当且仅当存在勒贝格可积函数 $\varphi(t)$ 满足下式

$$f(t)=f(a)+\int_a^t \varphi(s)\,\mathrm{d}\,s.$$

8. Hölder 与 Minkowski 不等式

设 $E\subset\mathbf{R}$ 是可测集，$1\le p<+\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 若 $u(x)$ 是 E 上的可测函数，而且 $|u(x)|^p$ 在 E 上是勒贝格可积，则称 $u(x)$ 是 E 上的 p **次幂可积函数**. E 上的 p 次幂可积函数全体记作 $L^p(E)$.

定理 1.86

(1) 三角不等式：对任意的 x, $y\in\mathbf{C}$, 有 $|x+y|\le|x|+|y|$, 由此可以推出，$||x|-|y||\le|x-y|$. 它可以推广到有限多个复数的情况，

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\le|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

(2) 对任意的 x, $y\in\mathbf{C}$, 我们有

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\le\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}.$$

(3) Young 不等式：　设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a\ge0$, $b\ge0$, 则有

$$a\,b\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

证明　仅证 (3). 在平面上由方程 $y=x^{p-1}$ 所定义的曲线在 $[0,\ a]$ 上围成曲边梯形的面积为

$$\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}\,x=\frac{a^p}{p}.$$

另一方面，将此曲线用 $x=y^{q-1}$ 来表示，在 y 轴的区间 $[0,\ b]$ 上曲边梯形的面积为

$$\int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}\,x=\frac{b^q}{q}.$$

因而

$$a\,b\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

定理 1.87 (级数形式的 Hölder 不等式)　设 $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $x_k, y_k \in \mathbf{C}$, 则有

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k y_k| \le \left[\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{k=1}^{+\infty}|y_k|^q\right]^{1/q}.$$

若当 $k>N$ 时 $x_k=y_k=0$, 即得有限和的形式. 当右边两个级数收敛时, 可推出左边的级数收敛.

证明　令

$$a_k=\frac{|x_k|}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{1/p}},\quad b_k=\frac{|y_k|}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i|^q\right]^{1/q}}.$$

这样一来便有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^p=1,\quad \sum_{k=1}^{n}b_k^q=1.$$

由 Young 不等式, 得

$$a_k b_k \le \frac{a_k^p}{p}+\frac{b_k^q}{q},$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k b_k \le \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k{}^p}{p}+\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}b_k{}^q}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

从而有

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|\cdot|y_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}}\le 1,$$

故

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}.$$

当右边两个级数收敛时, 令 $n\to+\infty$, 即得证.

定理 1.88 (积分形式的 Hölder 不等式)　设 $p>1$, $1/p+1/q=1$, $x(t)\in L^p(E)$, $y(t)\in L^q(E)$, 则 $x(t)\,y(t)\in L^1(E)$, 而且

$$\int_E|x(t)\,y(t)|\,\mathrm{d}t<\left(\int_E|x(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_E|y(t)|^q\,\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

证明 不妨假设

$$\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t > 0, \quad \int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t > 0.$$

因为如果

$$\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t = 0,$$

则由积分的性质 $x(t) = 0$ *a.e.*, 不等式显然成立. 令

$$a = \frac{|x(t)|}{\left(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}}, \quad b = \frac{|y(t)|}{\left(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}},$$

利用 Young 不等式得

$$\frac{|x(t)|\ |y(t)|}{\left(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}} \leq \frac{|x(t)|^p}{p\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t} + \frac{|y(t)|^q}{q\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t}.$$

两边积分得

$$\frac{\int_E |x(t)\ y(t)| \mathrm{d}t}{\left(\int_E |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_E |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

定理 1.89 (级数形式的 Minkowski 不等式) 设 $1 \leq p < +\infty$, 则对于任意的复数 x_k, y_k 有

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |y_k|^p\right)^{1/p}.$$

当右边的两个级数收敛时, 可推出左边的级数收敛. 当 $k > n$ 时 $x_k = y_k = 0$, 即得有限和的形式.

证明 $p = 1$ 时显然成立. 现设 $p > 1$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \\
\leq\ &\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1}|x_k| + \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{p-1}|y_k|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} \\
&\quad+\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{1/p}\right],
\end{aligned}
$$

两边同时除以 $\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{1/q}$，即可得到结论.

定理 1.90 (积分形式的 Minkowski 不等式) 设 $p\ge 1$, 当 $x(t)$, $y(t)\in L^p(E)$ 时, 有 $x(t)+y(t)\in L^p(E)$, 而且

$$
\left(\int_E|x(t)+y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\le\left(\int_E|x(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}+\left(\int_E|y(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}.
$$

§1.9 拓扑空间简介

本节介绍拓扑空间的概念，它为在大范围分析问题提供了一个适当的空间框架. 以后要介绍的距离空间、 Banach 空间和 Hilbert 空间等都是拓扑空间.

定义 1.91 设 X 是一个非空的集合， τ 是 X 的一些子集构成的非空族，如果 τ 满足下述三个条件:

(1) $\emptyset\in\tau, X\in\tau$;

(2) 如果 $\{U_\alpha\}\subset\tau$, 则 $\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha\in\tau$;

(3) 如果 $\{U_k:\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}\subset\tau$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{m}U_k\in\tau$.

则称 τ 是 X 上的一个 **拓扑**.

定义 1.92 如果 τ 为 X 上的拓扑，则 (X,τ) 叫做 **拓扑空间**. 通常，在拓扑已被理解的情况下， (X,τ) 可以简单记作 X. τ 中的元素叫做 X 的 **开集**. 开集的余集叫做 **闭集**. 一个集合 $A\subset X$ 的 **内部** 是包含在 A 内的最大开集. 一个集合 $A\subset X$ 的 **闭包** $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集. 一个点 $x\in X$ 的 **邻域** 是指包含 x 的开集.

定义 1.93 设 (X,τ) 是拓扑空间， Y 是 X 的非空子集. 定义 $\sigma:=\{G\cap Y:\quad G\in\tau\}$, 则 (Y,σ) 是拓扑空间，叫做 (X,τ) 的 **子空间**, σ 叫做 τ 的 **子拓扑**.

定义 1.94 设 (X,τ) 是拓扑空间，如果 X 不能分解成两个非空而又互不相交的闭集的并，则称 X 是 **连通的**. 如果 X 的子集 A 作为 X 的子空间是连通的，则称 A 是 X 的 **连通子集**. 如果 A 是 X 的极大连通子集 (即 A 是连通的，若 B 是 X 的连通子集，而且 $A\subset B$，则 $A=B$)，我们就说 A 是 X 的一个 **连通分支**. 如果对于 X 中任意不同的两点都有不相交的邻域，则称 X 为 **Hausdorff 空间**.

定义 1.95 设 (X,τ) 和 (Y,σ) 为拓扑空间，映射 $f:\ X\to Y$ 称为**连续的**，是指对任一开集 $V\subset Y$，V 的原像 $f^{-1}(V)$ 为 X 的开集，或者等价地说，对任一闭集 $F\subset Y$，$f^{-1}(F)$ 为 X 的闭集. 当 $Y=\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{C}$) 时，映射 f 又叫做 **实函数或复函数**. X 上的连续函数的全体记作 $C(X)$.

定义 1.96 设 (X,τ) 是拓扑空间，$A\subset X$，如果存在一族开集 $\{U_\alpha\}$，使得

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \supset A.$$

则 $\{U_\alpha\}$ 称为 A 的 **开覆盖**. 如果 A 的任一开覆盖总有一个有限的子覆盖，则 A 称为 **紧集**. 如果 X 自己是紧集，则称 X 为 **紧拓扑空间**.

注 紧集的闭子集也是紧集，单点集永远是紧集，但不一定是闭集. 在 Hausdorff 空间中，紧集一定是闭集. 当然，单点集一定是闭集.

定义 1.97 设 (X,τ) 为拓扑空间. 如果对于 X 的任意一对互不相交的闭集总能被一对互不相交的开集所分离，也就是说若 A，B 为闭集并且 $A\cap B=\emptyset$，则存在开集 U，V，使得 $A\subset U$，$B\subset V$，而且 $U\cap V=\emptyset$，那么，X 叫做 **正规的拓扑空间**.

定理 1.98 设 X 为正规的拓扑空间，E 和 F 为 X 的闭集，而且 $E\cap F=\emptyset$，则存在一个连续函数 $f:\ X\to[0,\ 1]$，使得

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in E,\\ 1, & x\in F.\end{cases}$$

定理 1.99 设 X 是正规的拓扑空间，E 是 X 的闭子集，$f:\ E\to\mathbf{R}$ 是有界连续函数，则存在有界连续函数 $F:\ X\to\mathbf{R}$ 满足

(1) $F(x)=f(x)$，$\forall\ x\in E$;

(2) $\sup\{|F(x)|:\ x\in X\}=\sup\{|f(x)|:\ x\in E\}$.

第二章 距离空间

距离空间是实直线 $\mathbf{R}$ 的推广，它在无限维分析 泛函分析 中的地位和作用类似于高等数学中的实直线 $\mathbf{R}$. 距离空间对数学和工程中各种不同问题统一处理提供了基础.

本章主要介绍距离空间的概念和性质，在此基础上研究空间的可分性、完备性、列紧性、紧性与全有界性等概念. 其次，介绍压缩映射的概念、Banach 不动点定理及其在几个重要方面的应用，此定理不仅给出了不动点的存在性和唯一性，也给出了不动点的迭代过程和误差估计. 最后介绍分形几何中分形空间的建立过程及拼图定理等，以此领会泛函分析的基本思想及其处理问题的方法.

§2.1 距离空间的定义

定义 2.1 设 X 是非空集合，对于 X 中任意的两个元素 x 与 y, 按某一法则都对应唯一的实数 $d(x,y)$, 而且满足下述三条公理：

(1) 非负性： $d(x,y)\ge 0$; $d(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$;

(2) 对称性： $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) 三角不等式： 对于任意的 x, y, $z\in X$, 恒有

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z).$$

则称 $d(x,y)$ 为 x 与 y 的 **距离**. 并称 X 是以 d 为距离的 **距离空间**，记作 (X,d). 通常，在距离已被理解的情况下，(X,d) 可以简单记作 X. X 中的元素称为 X 中的 **点**.

定义 2.2 设 (X,d) 是一个距离空间，如果对于 X 中的非空子集 M, 仍以 X 上的距离 d 作为 M 上的距离，则 M 也是距离空间，它称为 X 的 **子空间**，记作 $(M,d)\subset(X,d)$.

例 2.3 设 $X=\mathbf{R}$. 其中 $\mathbf{R}$ 是全体实数构成的集合，按照距离

$$d(x,y):=|x-y|,\qquad \forall\ x,\quad y\in X,$$

形成距离空间 $(\mathbf{R},d)$. 一般地，设 X 是 $\mathbf{R}$ 中任何一个非空集合，对任意的 x, $y\in X$, $d(x,y):=|x-y|$, 则 (X,d) 构成距离空间.

例 2.4 设 $X=\mathbf{R}^n$. 对于任意的 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in\mathbf{R}^n$. 按照距离

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &:= \sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|, \\ d_2(x,y) &:= \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^2\right)^{1/2}, \\ d_\infty(x,y) &:= \max_k|x_k-y_k|. \end{aligned}$$

分别形成距离空间 $(\mathbf{R}^n,d_1)$, $(\mathbf{R}^n,d_2)$ 和 $(\mathbf{R}^n,d_\infty)$.

例 2.5 序列空间 (l^1,d_1) 是距离空间, 其中

$$l^1:=\left\{x:\ x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots),\ \sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|<+\infty\right\}.$$

对于任意的 $x=(x_1, x_2, \cdots)$, $y=(y_1, y_2, \cdots)\in l^1$, l^1 上的距离 d_1 定义为

$$d_1(x,y):=\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k-y_k|.$$

例 2.6 序列空间 (l^2,d_2) 是距离空间, 其中

$$l^2:=\left\{x:\ x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots),\ \sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2<+\infty\right\}.$$

对于任意的 $x=(x_1, x_2, \cdots)$, $y=(y_1, y_2, \cdots)\in l^2$, l^2 上的距离定义为

$$d_2(x,y):=\sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k-y_k|^2}.$$

例 2.7 有界序列空间 (l^∞,d_∞) 是距离空间, 其中

$$l^\infty:=\{x:\ x=(x_1, x_2, \cdots, x_k,\cdots)\ \text{是有界点列}\}$$

对于任意的 $x=(x_1, x_2, \cdots)$, $y=(y_1, y_2, \cdots)\in l^\infty$, l^∞ 上的距离定义为

$$d_\infty(x,y):=\sup_k|x_k-y_k|.$$

注 类似地可以得到距离空间 $(l^p, d_p)(1 \le p \le +\infty)$.

例 2.8 有限闭区间 $[a, b]$ 上的全体连续函数构成的空间 $C([a, b])$. 在 $C([a, b])$ 上可以引入如下几个距离:

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d} t.$$

$$d_p(f,g) := \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^p \, \mathrm{d} t\right)^{1/p}.$$

$$d_\infty(f,g) := \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|.$$

分别形成距离空间 $(C([a, b]), d_1)$, $(C([a, b]), d_p)$, $(C([a, b]), d_\infty)$.

类似地, 对于有界连通开区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, 可以定义距离空间 $(C(\Omega), d_1)$, $(C(\bar{\Omega}), d_p)$, $(C(\bar{\Omega}), d_\infty)$, 其中 $\bar{\Omega}$ 表示 Ω 的闭包 $C(\bar{\Omega})$ 表示 $\bar{\Omega}$ 上全体连续函数构成的集合, 它们的距离分别定义为

$$d_1(f,g) := \int_{\bar{\Omega}} |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}\Omega.$$

$$d_p(f,g) := \left(\int_{\bar{\Omega}} |f(t) - g(t)|^p \, \mathrm{d}\Omega\right)^{1/p}.$$

$$d_\infty(f,g) := \sup_{t \in \bar{\Omega}} |f(t) - g(t)|.$$

其中, $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_n$, $t = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$.

例 2.9 设 $C^k([a, b])$ 表示闭区间 $[a, b]$ 上的具有直到 $k\,(k \ge 1)$ 阶连续导数的函数全体. 对于 $f, g \in C^k([a, b])$, 定义它们之间的距离为

$$d(f,g) := \sum_{i=0}^{k} \max_{t \in [a, b]} |f^{(i)}(t) - g^{(i)}(t)|.$$

类似地也可以定义距离空间 $C^k(\bar{\Omega})$, 在其上引入下面的距离:

$$d(f,g) := \sum_{0 \le |\alpha| \le k} \max_{t \in \bar{\Omega}} |D^\alpha (f - g)(t)|,$$

其中

$$(D^\alpha f)(t) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(t_1, t_2, \cdots, t_n)}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2} \cdots \partial t_n^{\alpha_n}}, \quad D^0 f(t) = f(t),$$

$$D = (D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_n),\ D_j = \frac{\partial}{\partial t_j},\quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

多重指标 α 是由非负整数作为分量构成的向量，即

$$\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n),\ |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,\ \ \alpha_i \geq 0.$$

这些空间具有如下的包含关系：

$$l^{p_1} \subset l^{p_2};$$

$$\cdots \subset C^k([a,b]) \subset C^{k-1}([a,b]) \subset \cdots \subset C([a,b])$$
$$\subset L^{\infty}([a,b]) \subset L^{p_2}([a,b]) \subset L^{p_1}([a,b]) \subset \cdots \subset L^1([a,b]);$$

其中 $1 < p_1 < p_2 < +\infty$, $[a,b]$ 为有界闭区间.

注 对于任何一个非空集合，我们都可以定义距离．一般来说，定义距离的方式不是唯一的，人们应当根据该集合（研究对象）的特点适当地引进距离以便充分反映这些特点．只有这样，在理论上或应用中才有较大的意义．

§2.2 距离空间中的极限

定义 2.10 设 $x_1,\ x_2,\ \cdots$ 是距离空间 (X,d) 中的一个点列，x_0 是 X 中一个确定的点．若对于任意给定的正数 ε，总存在自然数 N，当 $n \geq N$ 时始终有：$d(x_n,x_0) < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,x_0) = 0$，则称 **点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0**，或者等价地说 **x_0 是 $\{x_n\}$ 的极限**，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$，或者 $x_n \longrightarrow x_0 (n \to +\infty)$.

注 若一个非空集合中定义了两个或两个以上的距离，那么由它们导出的收敛性可以一致也可以不一致．

定理 2.11

(1) 若距离空间 (X,d) 中的点列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $x_n \to x$ 和 $y_n \to y\,(n \to +\infty)$，则 $d(x_n,y_n) \to d(x,y)\,(n \to +\infty)$；

(2) 若距离空间 (X,d) 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛，则极限是唯一的．

证明 (1) 若 $x_n \longrightarrow x\,(n \to +\infty)$，$y_n \longrightarrow y\,(n \to +\infty)$，根据距离的三角不等式有

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,x_n) + d(x_n,y) \\ &\leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y). \end{aligned}$$

从而,

$$d(x,y)-d(x_n,y_n)\le d(x,x_n)+d(y_n,y).$$

互换 (x,y) 和 (x_n,y_n) 的位置就会得到

$$d(x_n,y_n)-d(x,y)\le d(x,x_n)+d(y_n,y).$$

因此,

$$|d(x,y)-d(x_n,y_n)|\le d(x,x_n)+d(y_n,y)\longrightarrow 0\,(n\to+\infty).$$

(2) 假若 $\{x_n\}$ 有两个极限点 x_1 和 x_2, 则 $d(x_1,x_2)\le d(x_1,x_n)+d(x_n,x_2)\to 0$. 从而, $d(x_1,x_2)=0$. 因此, 由距离的非负性知 $x_1=x_2$. 此即说明极限点是唯一的.

例 2.12 考察 $\mathbf{F}^n$ 空间中的点列 $x_k=(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \cdots,\ x_n^{(k)})\in\mathbf{F}^n$, $k=1,\ 2,\ \cdots$. 对任意 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)\in\mathbf{F}^n$, 根据

$$d_2(x,y):=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$$

知道 $d_2(x_k,y)\longrightarrow 0\,(k\to+\infty)$, 当且仅当

$$d(x_k,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(k)}-y_i|^2\right)^{1/2}\longrightarrow 0\,(k\to+\infty),$$

当且仅当

$$x_i^{(k)}\longrightarrow y_i\,(k\to+\infty),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

也就是说, $(\mathbf{F}^n,d_2)$ 中点列的收敛等价于按坐标收敛.

例 2.13 l^p 空间.

$$l^p:=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots):\ \sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^p<+\infty,\ x_k\in\mathbf{F},\ \ k=1,\ 2,\ \cdots\},$$

对任意 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)$, $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots)\in l^p$, 我们定义距离为

$$d_p(x,y):=\left[\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k-y_k|^p\right]^{1/p},$$

则 (l^p,d_p) 为距离空间.

证明　距离公理中的 (1), (2) 是显然的. 对 (3) 的证明如下：对任意 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)$, $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots)$, $z=(z_1,\ z_2,\ \cdots)\in l^p$, 我们有

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left[\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k-y_k|^p\right]^{1/p} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{+\infty}|(x_k-z_k)+(z_k-y_k)|^p\right]^{1/p} \\ &< \left[\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k-z_k|^p\right]^{1/p}+\left[\sum_{k=1}^{+\infty}|z_k-y_k|^p\right]^{1/p} \\ &= d(x,z)+d(z,y), \end{aligned}$$

其中第三个不等号利用了 Minkowski 不等式.

注　(1) 设 $x_n=(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \cdots,\ x_k^{(n)},\ \cdots)\in l^p, n=1,\ 2,\ \cdots$, $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k,\ \cdots)\in l^p$. 若 $x_n\longrightarrow x\,(n\to+\infty)$, 也就是说

$$d(x_n,x)=\left[\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k^{(n)}-x_k|^p\right]^{1/p}\longrightarrow 0\,(n\to+\infty),$$

则必定有 $x_k^{(n)}\longrightarrow x_k\,(n\to\infty)$, $k=1,\ 2,\ \cdots$.

反之未必成立. 取 $x_n=(\underbrace{(1/n)^{1/p},\ \cdots,\ (1/n)^{1/p}}_{n\text{个}},0,\ 0,\ \cdots)$, $n=1,\ 2,\ \cdots$, $x=(0,\ 0,\ \cdots)$, 则 x_n, $x\in l^p$. 而且 $x_k^{(n)}\longrightarrow x_k=0\,(n\to+\infty)$, $k=1,\ 2,\ \cdots$, 但是

$$d(x_n,x)=\left[\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k^{(n)}|^p\right]^{1/p}=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\right]^{1/p}=1\not\longrightarrow 0\,(n\to+\infty),$$

故 l^p 中点列的收敛不等价于按坐标收敛.

(2) 设 $x_n=(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \cdots)\in l^p$, $n=1,\ 2,\ \cdots$, 则在 l^p 中 $x_n\longrightarrow x(n\to+\infty)$, 当且仅当

(i) 对于任意的 k, $x_k^{(n)}\longrightarrow x_k\,(n\to+\infty)$;

(ii) 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 始终存在自然数 $N(\varepsilon)$, 当 $k>N(\varepsilon)$ 时, 对任意的自然数 n 有

$$\left[\sum_{i=k}^{+\infty}|x_i^{(n)}|^p\right]^{1/p}<\varepsilon.$$

例 2.14 考察距离空间 $(C([a,\ b]),d_\infty)$. 设 $\{f_n\}$ 是 $C([a,\ b])$ 中的点列, $f\in C([a,\ b])$. 在距离空间 $(C([a,\ b]),d_\infty)$ 中 $f_n\longrightarrow f\,(n\to+\infty)$, 当且仅当 $d_\infty(f_n,f)\to 0\,(n\to+\infty)$, 当且仅当对任意给定的 $\varepsilon>0$, 始终存在自然数 N, 当 $n\ge N$ 时始终有 $d_\infty(f_n,f)<\varepsilon$. 但因

$$d_\infty(f_n,f)=\max_{a\le t\le b}|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow |f_n(t)-f(t)|<\varepsilon,\quad \forall t\in[a,\ b].$$

故 $f_n\longrightarrow f\,(n\to+\infty)$, 当且仅当函数列 $\{f_n(t)\}$ 一致收敛于 $f(t)$.

例 2.15 考察 $C([-1,\ 1])$ 中的函数列 $\{f_n\}$:

$$f_n(t)=\begin{cases}0, & -1\le t<-1/n,\\ nt+1, & -1/n\le t<0,\\ -nt+1, & 0\le t<1/n,\\ 0, & 1/n\le t\le 1.\end{cases}$$

因为

$$d_1(f_n,0)=\int_{-1}^{1}f_n(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\to 0.$$

因此, 在距离空间 $(C([-1,\ 1]),d_1)$ 中 $f_n\to 0$. 但因

$$d_\infty(f_n,0)=1,\quad \forall\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

所以在距离空间 $(C([-1,\ 1]),d_\infty)$ 中 $f_n\not\to 0$.

例 2.16 设 $L^p([a,\ b])$ 表示 $[a,\ b]$ 上 p 次幂勒贝格可积函数的全体, 并且把几乎处处相等的函数看成是同一个函数, 对于任意的 $f,\ g\in L^p([a,\ b])$, 定义下述距离:

$$d(f,g):=\left[\int_a^b|f(t)-g(t)|^p\,\mathrm{d}t\right]^{1/p},\quad p\ge 1,$$

则 $L^p([a,\ b])$ 构成一个距离空间, 称之为 p **次幂可积函数空间**.

注 若 $f_n,\ f\in L^p([a,\ b])$, 当 $n\to+\infty$ 时, $f_n\longrightarrow f$ 是指

$$d(f_n,f)=\left[\int_a^b|f_n(t)-f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right]^{1/p}\longrightarrow 0\,(n\to+\infty).$$

$f_n(t)$ 的这种收敛称为 p **次幂平均收敛**. 特别地, 当 $p=2$ 时, 我们称 $f_n(t)$**平均收敛**于 $f(t)$, 它的物理意义是按能量收敛. 按这种收敛并不一定能得到 $f_n(t)$ 逐点收敛于 $f(t)$, 但是必定存在子序列 $\{f_{n_k}(t)\}$, 使得 $f_{n_k}(t) \xrightarrow{a.e.} f(t)\,(n\to+\infty)$.

例 2.17 设 s 表示一切数列的全体, 对于 $x=(x_1, x_2, \cdots)$, $y=(y_1, y_2, \cdots)\in s$, 定义下述距离:

$$d(x,y):=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|},$$

则 s 是一个距离空间.

证明 距离公理中的 (1)、(2) 是明显的, 下面仅证明 (3). 令 $f(t)=\frac{t}{1+t}$, 则对任意的 $t>0$, 有 $f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}\geq 0$, 所以, 当 $t\geq 0$ 时 $f(t)$ 单调增加. 因 $|a+b|\leq|a|+|b|$, 故有

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

利用以上不等式我们可以得到

$$\begin{aligned}d(x,y) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|(x_k-z_k)+(z_k-y_k|}{1+|(x_k-z_k)+(z_k-y_k)|}\\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-z_k|}{1+|x_k-z_k|}+\frac{1}{2^k}\frac{|z_k-y_k|}{1+|z_k-y_k|}\right]\\ &= d(x,z)+d(y,z).\end{aligned}$$

因此, $d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)$.

注　设 $x_n=(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \cdots)$, $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)\in s$, 则在 s 中,

$$\begin{aligned}&x_n\longrightarrow x\,(n\to+\infty),\\ \Longleftrightarrow&\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k^{(n)}-x_k|}{1+|x_k^{(n)}-x_k|}\longrightarrow 0\,(n\to+\infty).\\ \Longleftrightarrow&\ x_k^{(n)}\longrightarrow x_k\,(n\to+\infty),\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\\ \Longleftrightarrow&\ x_n\ \text{按坐标收敛于}\ x.\end{aligned}$$

§2.3　距离空间中的开集、闭集

类似于平常的几何术语, 本节在一般的距离空间 X 中给出开球、闭球、球面、开集、闭集等概念, 对 X 中点集的构造给出某种形象化的描述, 所述内容对于整个泛函分析都是很基本的. 但应注意, 由于给定的非空集合 X 的任意性以及在 X 上定义距离的多样性, 与 Euclid 空间的情形相比, 这些概念的引入包含了更加丰富和更加深刻的内容. 一方面要注意这些内容与 Euclid 空间情形的共同点, 更要注意它们的不同点. 最应理解的是: 这些概念都离不开预先定义的距离.

定义 2.18　设 (X,d) 是距离空间, $x_0\in X$, $r>0$, 称 X 中的点集

$$B_r(x_0)=B(x_0,r):=\{x\in X:\ \ d(x,x_0)<r,\ \ x\in X\},$$

为以 x_0 为中心, 以 r 为半径的 **开球**, 而称

$$\overline{B_r}(x_0)=\overline{B}(x_0,r):=\{x:\ \ d(x,x_0)\le r,\ \ x\in X\},$$

为以 x_0 为中心, 以 r 为半径的 **闭球**. 开球 $B_r(x_0)$ 也称为 x_0 的 r **邻域**. X 中以 x_0 点为中心和以 $r>0$ 为半径的球面定义为

$$S_r(x_0)=S(x_0,r):=\{x\in X:\ \ d(x,x_0)=r,\ \ x\in X\}.$$

设 (X,d) 是距离空间并且 $A\subset X$, $x\in G$. 若存在 $B_r(x)\subset A$, 则称 x 为 A 的 **内点**. 用 $\mathring{A}$ 记 A 的内点全体, 称它为 A 的 **内部**. 若 A 中的每一点都是它的内点, 则称 A 是 X 中的 **开集**.

注　空集 $\emptyset$ 与距离空间 X 都是开集.

下面研究开集的性质.

定理 2.19

(1) 有限个开集的交集是开集;

(2) 任意多个开集的并集是开集.

注 (1) 无限多个开集的交未必为开集;

(2) 若 $X=[a,\ b]$. 对于任意的 $x,\ y\in X$, 定义距离为: $d(x,y):=|x-y|$, 则 X 为 $\mathbf{R}$ 的子空间, 而且 a 是空间 (X,d) 中点集 $[a,\ b]$ 的内点, 但 a 不是空间 $(\mathbf{R},d)$ 中点集 $[a,\ b]$ 的内点. 对于空间 $([a,\ b],d)$, $[a,\ b]$ 是开集, 但在空间 $(\mathbf{R},d)$ 内, $[a,\ b]$ 只能是闭集, 而不是开集;

(3) 任何距离空间都是拓扑空间, 其中的拓扑 (所有开集构成的集合) 称为距离拓扑.

定义 2.20 设 (X,d) 是距离空间并且 $A\subset X$. 若 $A^c:=X\backslash A$ 为开集, 则称 A 为 X 的 **闭集**. 由 De Morgan 对偶性知 $\emptyset$, X 为闭集.

定理 2.21

(1) A 是开集, 当且仅当 $A=\mathring{A}$;

(2) 有限个闭集的并集是闭集,

(3) 任意多个闭集的交集为闭集.

定义 2.22 设 (X,d) 是距离空间且 $A\subset X, A\neq\emptyset$, $x_0\in X$. 若对任意的正数 r, 在 x_0 的 r 邻域 $B_r(x_0)$ 中总有属于 A 而异于 x_0 的点, 则称 x_0 为 A 的 **聚点或极限点**.

定理 2.23 设 (X,d) 是距离空间且 $A\subset X$, 则 A 为闭集, 当且仅当 A 的聚点都在 A 内.

定义 2.24 设 (X,d) 是距离空间并且 $A\subset X$, $A\neq\emptyset$, 则 A 的所有聚点构成的集合称为 A 的 **导集**, 记作 A', 称 $A\cup A'$ 为 A 的 **闭包**, 记作 $\overline{A}$, 即 $\overline{A}=A\cup A'$. 令 $\partial A=\overline{A}\backslash\mathring{A}$, 称它为 A 的 **边界**. 若存在 X 中的开球 $B_r(x_0)$, 使得 $A\subset B_r(x_0)$, 则称 A 为 **有界集**. 称 $d(A):=\sup\{d(x,y):\forall x,\ y\in A\}$ 为 A 的 **直径**. 如果 $A\subset X$ 的直径 $d(A)<+\infty$, 则 A 是有界集. 设 (X,d) 是距离空间且 $A\subset X$, $A\neq\emptyset$, $x_0\in X$, 则称 $d(x_0,A):=\inf\{d(x_0,x):\ \forall x\in A\}$ 为 **点 x_0 到集合 A 的距离**. 若 $x_0\in A$ 但不是 A 的聚点, 则称 x_0 为 A 的 **孤立点**. 设 (X,d) 是距离空间且 $A\subset X$, $x_0\in X$. 若存在 x_0 的某个邻域 $B_r(x_0)$ 使得 $B_r(x_0)\cap A=\emptyset$, 则称 x_0 为 A 的 **外点**.

注 A 为 X 中的闭集 $\Longleftrightarrow A=\overline{A}\Longleftrightarrow$ 若 $\{x_n\}\subset A$, $x_n\longrightarrow x\,(n\to+\infty)$, 则 $x\in A$.

同一概念可以从不同角度来刻画. 下面以闭包为例加以说明.

定理 2.25 设 (X,d) 是距离空间并且 $A\subset X, A\neq\emptyset$, $x_0\in X$, 则以下条件等价:

(1) $x_0\in \overline{A}$;

(2) $x_0\in A\cup A'$;

(3) 存在点列 $\{x_n\}\subset A$, 使得 $x_n\to x_0\,(n\to+\infty)$;

(4) $d(x_0,A)=0$.

例 2.26 设 $X=\mathbf{R}$, $A=\{1, \frac{1}{2}, \cdots\}$, 对任意的 $x, y\in X$, 定义它们的距离为 $d(x,y):=|x-y|$, 则 X 按照 d 为一距离空间而且是 $\mathbf{R}$ 的子空间, 对每个自然数 n, $\frac{1}{n}$ 都是 A 的孤立点, 0 是 A 的聚点, 但不属于 A. 设 $B=(0, 1]$, 则闭区间 $[0, 1]$ 中的一切点都是 B 的聚点, $(0, 1)$ 中的一切点都是它的内点.

例 2.27 设 $X=\{0, 1, 2, \cdots\}$, 对任意的 $x, y\in X$, 它们的距离定义为 $d(x,y):=|x-y|$, X 按照 d 为一距离空间而且是 $\mathbf{R}$ 的子空间. X 中的一切点都是它的孤立点, 当然也是它的内点.

例 2.28 设 $X=\{0, 1, 2, \cdots\}$,

$$d(x,y):=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

X 中的每个点既是它的内点也是它的孤立点. 每个单元素集同时是开集与闭集.

例 2.29 设 $X=(0, 1]\cup[2, 3)$, 对于任意的 $x, y\in X$, 定义距离为 $d(x,y):=|x-y|$. 因此 X 为 $\mathbf{R}$ 的子空间. $(0, 1]$ 及 $[2, 3)$ 既是 X 的开集并且是闭集, X 中以 1 为中心以 $\frac{1}{2}$ 为半径的开球是区间 $(\frac{1}{2}, 1]$.

§2.4 稠密性与可分性

定义 2.30 设 A、B 都是距离空间 (X,d) 的两个集合. 如果 $\overline{A}=X$, 则称 A 为 X 中的**稠密集**. 如果 $\overline{A}\supset B$, 就称 A **在** B **中稠密**. 若 $A\subset B\subset\overline{A}$, 则称 A 为 B 的**稠密子集**.

A 在 B 中稠密, 当且仅当下述三个条件中任意一条成立:

(1) 对于任意的 $x\in B$ 以及任意的 $\varepsilon>0$, 存在 A 中的点 y 使得 $d(x,y)<\varepsilon$;

(2) 对于任给的 $\varepsilon>0$, 以 A 中的每个点为中心, 以 ε 为半径的全部开球的并包含 B;

(3) 对于任意的 $x \in B$, 存在 A 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

注 在稠密性的定义中, A 不必包含在 B 中甚至不必与 B 相交.

定义 2.31 距离空间 X 称为**可分的**, 是指在 X 中存在一个稠密的可数子集. $A \subset X$ 称为**可分的**, 若 A 本身作为距离空间是可分的.

例 2.32 空间 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 中有理点的全体在 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 中稠密. $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 是可分的.

证明 要证明 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 可分, 只需找出子集 M 使得 M 满足

(1) M 可数;

(2) M 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密.

取

$$M = \{(r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n):\ \ r_i \in \mathbf{Q},\ \ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}.$$

因有理数集 $\mathbf{Q}$ 为可数集, 故 M 是可数集.

下面证明 M 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密, 即证明对于 $\mathbf{R}^n$ 中任意一点 $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, 有

$$r_k = (r_1^{(k)},\ r_2^{(k)},\ \cdots,\ r_n^{(k)}) \in M, \quad k = 1,\ 2,\ \cdots,$$

使得 $r_k \to x$. 由有理数集 $\mathbf{Q}$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 中的稠密性知, 对每一个实数 x_i, 存在有理数点列 $r_i^{(k)}$, 使得对于任意的 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都有, $r_i^{(k)} \longrightarrow x_i\,(k \to +\infty)$. 于是对于任意的自然数 k 得到 M 中的点列: $r_k = (r_1^{(k)},\ r_2^{(k)},\ \cdots,\ r_n^{(k)})$. 现证它收敛于 x. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 由于 $r_i^{(k)} \longrightarrow x_i\,(k \to +\infty)$, 对于 $\varepsilon/\sqrt{n} > 0$, 恒存在 $K_i > 0$, 当 $k > K_i$ 时, 有

$$|r_i^{(k)} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

取 $K = \max\{K_1,\ K_2,\ \cdots,\ K_n\}$, 当 $k > K$ 时, 对于 $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$, 有 $|r_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$, 因此

$$d(r_k, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |r_i^{(k)} - x_i|^2} < \sqrt{\frac{n\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

即 $r_k \longrightarrow x\,(k \to +\infty)$. 所以 M 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密, 从而知 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 是可分的.

例 2.33 空间 (l^p, d_p) 是可分的.

证明 设

$$M := \{(r_1,\ r_2\ \cdots,\ r_n,\ 0,\ \cdots):\ r_i \in \mathbf{Q},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n\in\mathbf{N}\}.$$

很明显 M 是可数的. 下面证明 M 在 l^p 中稠密. 我们仅需证明对于任意点 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots)\in l^p$, x 的任意 ε 邻域内包含 M 的元素 r 即可. 因为 $x\in l^p$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|x_i|^p<+\infty$, 故对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在自然数 n_0, 使得

$$\sum_{i=n_0+1}^{+\infty}|x_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

对如此选定的自然数 n_0, 对于 n_0 个实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n_0}$, 取 n_0 个有理数点列 $r_i^{(k)}$, 使得 $r_i^{(k)}\to x_i\,(k\to+\infty)$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_0$, 因此, 存在自然数 K, 使得当 $k\ge K$ 时, 对于 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_0$, 有

$$|r_i^{(k)}-x_i|<\frac{\varepsilon}{(2n_0)^{1/p}},$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n_0}|r_i^{(k)}-x_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

令 $r^{(k)}=(r_1^{(k)},\ r_2^{(k)},\ \cdots,\ r_{n_0}^{(k)},\ 0,\ \cdots)\in M\subset l^p$, 则

$$\begin{aligned}d(r^{(k)},x) &= \left(\sum_{i=1}^{n_0}|r_i^{(k)}-x_i|^p+\sum_{i=n_0+1}^{+\infty}|x_i|^p\right)^{1/p}\\ &< (\varepsilon^p/2+\varepsilon^p/2)^{1/p}=\varepsilon,\end{aligned}$$

这说明在 x 的 ε 邻域内必包含 M 中的点, 故 M 在 l^p 中稠密, 也就是说 l^p 有一个可数稠密子集, 因此, (l^p,d_p) 是可分的.

例 2.34 空间 $(C([a,\ b]),d_\infty)$ 是可分的.

证明 设

$$P_0=\left\{\sum_{k=0}^{n}r_k t^k:\quad r_k\in\mathbf{Q},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\right\}.$$

显然, P_0 是可数集. 要证明 $(C([a,\ b]),d_\infty)$ 可分, 只需证明 P_0 在 $C([a,\ b])$ 中稠密. 在 $C([a,\ b])$ 中任取一元素 $x(t)$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 由 Weierstrass 定理知, 恒存在多项式 $p_\varepsilon(t)\in P$, 使得

$$d(x,p_\varepsilon)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-p_\varepsilon(t)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对如此取定的多项式 $p_\varepsilon(t)$，由于有理数在实数中稠密，故可以找到一个以有理数为系数的多项式 $p_0(t) \in P_0$，使得

$$d(p_\varepsilon, p_0) = \max_{a \le t \le b} |p_0(t) - p_\varepsilon(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

这样一来，对于 $C([a, b])$ 中的任意元素 x 与任意的 $\varepsilon > 0$，恒存在 $p_0 \in P_0$，使得

$$d(x, p_0) \le d(x, p_\varepsilon) + d(p_\varepsilon, p_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 P_0 在 $C([a, b])$ 中稠密，从而 $(C([a, b]), d_\infty)$ 可分.

注 可分概念是与距离、集合有关的. 对于同一集合，若定义的距离不同，它在一种距离下可分，而在另一种距离下就不一定是可分的.

例 2.35 设 $X = [0, 1]$. 对任意的 $x, y \in [0, 1]$，定义它们之间的距离如下：

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \ne y, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

则 (X, d) 是一个距离空间，但不是可分的.

证明 反证法. 假若 (X, d) 可分，则存在可数子集 $B = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 在 X 中稠密，因为对于任意的 $\delta > 0$，$\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B(x_n, \delta) \supset X$，特别取 $\delta = 1/3$，下面说明这是不可能的. 事实上，由于 $X = [0, 1]$ 不可数，那么在可数个球 $B(x_n, 1/3)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 中至少有一个球 $B(x_{n_0}, 1/3)$ 中含有 X 中的两个不同点 x, y，即 $x, y \in B(x_{n_0}, 1/3)$，而且 $x \ne y$. 又因为

$$d(x, y) \le d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y) < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < 1,$$

这与 $x \ne y$ 时，$d(x, y) = 1$ 相矛盾，因此 $X = [0, 1]$ 在距离 (2.4.1) 下不是可分的.

§2.5 距离空间的完备性

定义 2.36(完备性) 距离空间 (X, d) 中的点列 $\{x_n\}$，称为 **Cauchy 点列或基本点列** 是指：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，始终存在自然数 N，使得当 $m, n > N$ 时，$d(x_m, x_n) < \varepsilon$. 或者等价地说，当 $m, n \to +\infty$ 时，$d(x_n, x_m) \to 0$. 若距离空间 (X, d) 中的每一个基本点列都收敛于 (X, d) 中的某一元素，则称 (X, d) 是 **完备的距离空间**.

定理 2.37 设 (X,d) 是完备的距离空间，而且 $M \subset X$，则 (M,d) 完备的充分和必要条件是 M 为 X 中的闭集.

证明 必要性的证明. 设 M 为 X 中的完备子空间，$\{x_n\}$ 为 M 中的收敛点列，不妨假定当 $n \to +\infty$ 时，$x_n \longrightarrow x$，则 $\{x_n\}$ 必定是 M 中的基本点列. 由 M 的完备性知，存在 $y \in M$，使得当 $n \to +\infty$ 时，$x_n \longrightarrow y$. 由极限的唯一性可知，$x = y \in M$，故 M 是闭的.

下面来证明充分性. 设 M 为 X 的闭子集，而且 $\{x_n\}$ 为 M 中的基本点列，则 $\{x_n\}$ 也是 X 中的基本点列. 由于 X 是完备的，所以，存在 $x \in X$，而且 $x_n \longrightarrow x\,(n \to +\infty)$. 考虑到 M 为闭集，故 $x \in M$. 因此，M 是完备的.

定理 2.38 距离空间中的任一收敛点列必是基本点列，但基本点列未必是收敛点列.

证明 设 $x_n \longrightarrow x_0\,(n \to +\infty)$，则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，始终存在自然数 N，只要 $n > N$ 就有，$d(x_n,x_0) < \varepsilon/2$. 任取 $m > N$，同理也有，$d(x_m,x_0) < \varepsilon/2$，因此，当 m，$n > N$ 时，有

$$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x_0) + d(x_0,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故收敛点列必为基本点列. 反之未必为真.

例 2.39 取 $X = \mathbf{R}\backslash\{0\}$，其距离为通常的距离，则 $\{1/n\}$ 是 (X,d) 中的基本点列，但它在 (X,d) 中没有极限.

证明 因为

$$d(x_n,x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \longrightarrow 0\,(n,m \to +\infty),$$

所以 $\{1/n\}$ 是 (X,d) 中的基本点列，但它在 (X,d) 中没有极限，故 $\{1/n\}$ 不是收敛点列.

例 2.40 设 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$，$d(x,y) = |x-y|$，则 (X,d) 是完备的距离空间.

证明 设 $\{x_n\}$ 为 (X,d) 中的基本点列，则 $\{x_n\}$ 从某一项开始必有相同的某元素. 取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，则存在自然数 N，当 m，$n > N$ 时，$|x_m - x_n| < \frac{1}{2}$. 由于 x_n 只可能是 1，2，3 三个数，而任何两数之差的绝对值均不小于 1，可见，为了使得从第 N 项以后两项之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$，只有 $x_n\,(n > N)$ 必为同一个数，因此，$x_n \longrightarrow x\,(n \to +\infty)$. 这表明 (X,d) 中的任何基本点列在 (X,d) 中都有极限，故 (X,d) 是完备的距离空间.

例 2.41　(1) $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 是完备的距离空间；

(2) $(\mathbf{C}^n, d_2)$、l^p 和 $L^p([a,b])(p \geq 1)$ 都是完备的距离空间.

证明　仅给出 (1) 的证明. 要证明 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 是完备的距离空间，就是要证明任何基本点列都是收敛点列.

设 $\{x_k\}$ 是 $(\mathbf{R}^n, d_2)$ 中的基本点列，$x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})$. 因此，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，始终存在自然数 N，当 m，$k > N$ 时，有

$$d(x_m, x_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(m)} - x_i^{(k)}|^2} < \varepsilon. \tag{2.5.1}$$

由上式，对 $i = 1, 2, \cdots, n$，只要 m，$k > N$，就有 $|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon$. 这表明对于任意的 $i = 1, 2, \cdots, n$，$\{x_i^{(k)}\}$ 皆为基本点列. 由实数 $\mathbf{R}$ 的完备性可知，对于任意的 $i = 1, 2, \cdots, n$，$\lim\limits_{k\to+\infty} x_i^{(k)} = x_i$. 由此就确定了元素 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 在 (2.5.1) 式中令 $m \to +\infty$，可以得到

$$d(x_k, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i|^2} \leq \varepsilon.$$

这就说明，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，始终存在自然数 N，只要 $k > N$，就有 $d(x_k, x) \leq \varepsilon$. 故 x 为 $\{x_k\}$ 的极限点，因而，$(\mathbf{R}^n, d_2)$ 是完备的距离空间.

例 2.42　空间 $(C([a,b]), d_\infty)$ 是完备的距离空间.

证明　设 $\{x_n(t)\} \subset C([a,b])$ 是 $(C([a,b]), d_\infty)$ 中的基本点列，则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，始终存在自然数 N，使得当 m，$n > N$ 时，就有

$$d(x_m, x_n) = \max_{a \leq t \leq b} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon,$$

即对于任意给定的 $t \in [a,b]$，都有 $|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$. 这就是函数列 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛的充分和必要条件，故存在函数 $x(t)$，使得当 $n \to +\infty$ 时，$x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$. 根据有界闭区间上连续函数列 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛时必定收敛于连续函数知道，$x(t) \in C([a,b])$，从而 $(C([a,b]), d_\infty)$ 完备.

注　$C([a,b])$ 按照距离 d_∞ 是一个完备的距离空间，但是按照距离 d_1 所构成的距离空间并不是完备的.

例 2.43　$(C([a,b]), d_1)$ 不是完备的距离空间.

证明　为了要证明距离空间 $(C([a,b]), d_1)$ 不是完备的，只需在 $(C([a,b]), d_1)$ 中找出一个基本点列，使它在 $(C([a,b]), d_1)$ 中没有极限就可以了. 在

$C([a,b])$ 中选取下面的函数列：首先，在 (a,b) 中任意取定一点 c，例如选取 $c=(a+b)/2$，定义

$$x_n(t)=\begin{cases}-1, & a\le t\le c-\frac{1}{n},\\ n(t-c), & c-\frac{1}{n}<t<c+\frac{1}{n},\\ 1, & c+\frac{1}{n}\le t\le b.\end{cases}$$

其次，证明 $\{x_n\}$ 是 $(C([a,b]),d_1)$ 中的基本点列. 事实上，设 $m>n$，考虑到

$$\begin{aligned}d(x_m,x_n)&=\int_a^b|x_m(t)-x_n(t)|\,\mathrm{d}t\\&=2\left[\int_c^{c+\frac{1}{m}}(m(t-c)-n(t-c))\,\mathrm{d}t+\int_{c+\frac{1}{m}}^{c+\frac{1}{n}}(1-n(t-c))\,\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\to 0\,(m,\ \ n\to+\infty),\end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 是基本点列.

下面证明 $C([a,b])$ 中的任何元素都不可能是 $\{x_n\}$ 的极限. 事实上，若 $x\in C([a,b])$ 是 $\{x_n\}$ 的极限，则有 $d_1(x_n,x)\longrightarrow 0\,(n\to+\infty)$，但是

$$\begin{aligned}d_1(x_n,x)&=\int_a^b|x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^{c-\frac{1}{n}}|x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}}|x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t\\&\quad+\int_{c+\frac{1}{n}}^b|x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t\\&=\int_a^{c-\frac{1}{n}}|-1-x(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}}|x_n(t)-x(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{c+\frac{1}{n}}^b|1-x(t)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

考虑到当 $n\to+\infty$ 时，有 $d_1(x_n,x)\longrightarrow 0$，故

$$\int_a^c|1+x(t)|\,\mathrm{d}t=0,\quad \int_c^b|1-x(t)|\,\mathrm{d}t=0.$$

由 $x(t)$ 的连续性知，在 $[a,c]$ 上 $x(t)\equiv -1$，在 $[c,b]$ 上 $x(t)\equiv 1$，而

$$\lim_{t\to c^-}x(t)=-1,\quad \lim_{t\to c^+}x(t)=1,$$

这与 $x(t)$ 在 c 点连续相矛盾. 故 $C([a,b])$ 中的任何元素都不可能是 $\{x_n\}$ 的极限. 因此, $(C([a,b]),d_1)$ 是不完备的.

不完备的距离空间是大量存在的, 但每一个不完备的空间都可以扩大成完备空间. 比如有理数全体 $\mathbf{Q}$ 作为 $\mathbf{R}$ 的子空间是不完备的, 但是我们可以将 $\mathbf{Q}$ 扩大成完备的距离空间 $\mathbf{R}$, 即在 $\mathbf{Q}$ 中加入新元素 (无理数), 使它成为新的距离空间 $\mathbf{R}$ 而且 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中稠密.

定义 2.44 设 (X,d), $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是两个距离空间. 若存在 X 到 $\tilde{X}$ 上的一一映射 T, 使得对于任意的 x, $y\in X$ 都有, $\tilde{d}(Tx,Ty)=d(x,y)$, 则称距离空间 (X,d) 与 $(\tilde{X},\tilde{d})$ **等距同构**. 这个映射 T 称为 **等距同构映射**.

定义 2.45 设 (X,d), $(\tilde{X},\tilde{d})$ 都是距离空间, $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是完备的. 若 $\tilde{X}$ 中包含一个稠密子集 X_0, 而且 $(X_0,\tilde{d})$ 与 (X,d) 等距同构, 则称距离空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是 (X,d) 的 **完备化空间**.

定理 2.46 在等距同构意义下, 每一个距离空间 (X,d) 都有唯一的完备化空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$.

例 2.47 距离空间 $(\mathbf{Q},d)$ 的完备化空间是 $(\mathbf{R},d)$.

§2.6 Baire 定理

设 (X,d) 是一个完备的距离空间, A 是 X 中满足某一条件 P 的对象之全体. 很有意义的问题是: 满足条件 P 的对象在 X 中具有一般性吗? 首要的问题是选择一种恰当的模式描述稀有性和一般性. Baire 第一类型集和第二类型集的概念也许是一种恰当的选择.

定义 2.48 设 (X,d) 为一距离空间, A 是 X 的子集. 如果 A 在 X 的任何一个非空开集中均不稠密, 则称 A 为 **稀疏集**, 等价地说 A 为稀疏集是指: $\overset{\circ}{\overline{A}}=\emptyset$.

设 A 为距离空间 X 的子集. 如果 A 可以表示成至多可列个稀疏集的并, 则称 A 是 **第一类型集**. 凡不是第一类型的集均称为 **第二类型集**.

例 2.49

(1) 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的任一有限子集是稀疏集. 特别地, 任一单元素集是稀疏集, 故 $\mathbf{R}^n$ 中的任一可数集是第一类型的.

(2) 设 $X=\{1,2,\cdots\}$, $d(x,y)=|x-y|$. 因为 $B(x,1/2)=\{x\}$, 故 $\{x\}$ 在 $B(x,1/2)$ 中稠密, 于是 $\{x\}$ 不是稀疏集. 因此, 包含在 $\{x\}$ 中的任一稀疏集必为空集. 如果 $\{x\}$ 是可数个稀疏集的并, 则 $\{x\}$ 必为空集, 这样就产生了矛盾. 因此, $\{x\}$ 为第二类型集.

定理 2.50 距离空间 (X,d) 的子集 A 为稀疏集的充分必要条件是对任意开球 $B_r(x_0)$，存在另一个含于 $B_r(x_0)$ 中的开球 $B_\delta(y_0)$ 使得

$$A \cap B_\delta(y_0) = \emptyset.$$

证明 必要性的证明. 设 A 是稀疏集，则 A 在开球 $B_r(x_0)$ 中不稠密，于是存在 $y_0 \in B_r(x_0)$ 以及以 y_0 为中心的开球 $B_\delta(y_0) \subset \overline{B_r}(x_0)$ 使得 $B_\delta(y_0)$ 与 A 不相交，即 $A \cap B_\delta(y_0) = \emptyset$.

下面证明充分性. 假若定理中条件成立，则 A 在任一非空开球中不稠密，因此 A 是稀疏集.

定理 2.51 (闭球套定理) 设 (X,d) 是完备的距离空间，$K_n = \overline{B}(x_n, r_n)$ 是 X 中的一列闭球，满足 $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$，若球的半径 r_n 构成的序列 $\{r_n\} \longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$，则有唯一的点 x_0 含于所有的球中，即 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} K_n$.

证明 分三步来证明.

(1) 证明球心序列 $\{x_n\}$ 是基本列. 对任意给定的 $m > n$ 有，$x_m \in K_m \subset K_n$，即有 $d(x_m, x_n) \le r_n$. 当 m，$n \to +\infty$ 时，由 $r_n \longrightarrow 0$，就会有 $d(x_m, x_n) \longrightarrow 0$，此即说明 $\{x_n\}$ 是基本点列. 因为 X 是完备的，故存在 $x_0 \in X$，使得 $x_n \longrightarrow x_0\,(n \to +\infty)$.

(2) 证明 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} K_n$. 任意取定一个闭球 K_n，因为 $K_n \supset K_{n+1} \supset \cdots$，故 $x_{n+p} \in K_n\,(p = 1, 2, \cdots)$，因而点列 x_n，x_{n+1}，$\cdots$ 也收敛于 x_0. 同时考虑到 K_n 为闭集，故 $x_0 \in K_n$. 注意到 n 是任意选取的，因此对任何自然数 n，都有 $x_0 \in K_n$，也就是有 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} K_n$.

(3) 证明唯一性. 若除点 x_0 外还有 $x' \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} K_n$，由于

$$d(x', x_0) \le d(x', x_n) + d(x_n, x_0) \le 2r_n \longrightarrow 0\,(n \to +\infty),$$

所以，$d(x', x_0) = 0$，从而 $x' = x_0$.

注 此定理的逆命题也是对的，即如果距离空间 (X,d) 中任一半径趋于零的闭球套都有非空的交，则空间 (X,d) 是完备的.

定理 2.52 (Baire 纲定理) 完备的距离空间是第二类型集.

注 Baire 纲定理也有以下描述：设 A 是完备的距离空间 (X,d) 中的第一类型集，则有

(1) $\overset{\circ}{A}=\emptyset$, $\overline{A^c}=X$;

(2) A^c 是第二类型集.

完备的距离空间中的第一类型集和第二类型集主要用来描述稀有性和一般性. 这在应用中是很有意义的. 应用 Baire 定理时主要的问题是适当地构造某个第一类型集. 下面将着重说明该方法的主要思路, 但略去个别推导细节.

例 2.53 在 $C([0,1])$ 中具有无限全变差的函数集合 V 是非空的. 更确切地说 V 的余集 V^c 是第一类型的.

$(C([0,1]),d_\infty)$ 是一个完备的距离空间. 令 $A=\{f\in C([0,1]):\ \ \mathrm{V}_0^1(f)<+\infty\}$, 其中 $\mathrm{V}_0^1(f)$ 表示函数 f 在区间 $[0,1]$ 上的全变差. 我们仅需说明 A 是 $C([0,1])$ 中的第一类型集. 为此, 对于任意的自然数 n, 令 $A_n=\{f\in C([0,1]):\ \ \mathrm{V}_0^1(f)\le n\}$. 则 $A=\bigcup A_n$. 仅需说明 A_n 是 $C([0,1])$ 中的稀疏集. 容易证明 A_n 是闭集, 所以仅需证明 $\overset{\circ}{A}_n=\emptyset$, 即就是说 $\overline{A_n^c}=C([0,1])$. 这等价于证明每个 $f\in C([0,1])$ 可以用 A_n^c 中的函数一致逼近. 因为 $A_n^c=\{f\in C([0,1]):\ \ \mathrm{V}_0^1(f)>n\}$. 故仅需证明对于每个 $f\in C([0,1])$ 可以用全变差充分大的连续函数一致逼近. 当然, 这可以用振动足够快的锯齿形函数来实现.

例 2.54 在 $C([0,1])$ 中处处不可微的函数集合 D 是非空的. 更确切地说 D 的余集 D^c 是第一类型的.

$(C([0,1]),d_\infty)$ 是一个完备的距离空间. 定义集合

$$A=\{f\in C([0,1]):\ f\text{ 在 }[0,1]\text{ 上至少在一点处可微}\},$$

同时, 令

$$A_n=\{f\in C([0,1]):\ \exists x\in[0,1],$$

$$\text{使得}\quad \sup_{x+h\in[0,1]\ |h|\le 1/n}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\le n\}.$$

任取 $f\in C([0,1])$, 显然 f 在 $[0,1]$ 上处处不可微, 当且仅当 $f\notin A$. 因此, 仅需证明 A 为的第一类型集. 如果 f 在某个点 $x_0\in[0,1]$ 处可微, 则必有自然数 n, 使得 $f\in A_n$. 于是

$$D^c=C([0,1])\backslash D\subset\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n.$$

下面我们证明每个 A_n 是稀疏集. 为此, 先证明 A_n 是闭集. 事实上, 若函数点列 $\{f_k\} \subset A_n$, $f_k \to f\,(k \to +\infty)$, 因而对于任意的自然数 k, 则有 $x_k \in [0,1]$, 使得

$$|f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| \leq n\,|h|(0 \leq x_k + h \leq 1).$$

不妨设 $x_k \to x_0 \in [0,1]\,(k \to +\infty)$, 因此,

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leq n\,|h|\,(0 \leq x_0 + h \leq 1),$$

这就表明 $f \in A_n$, 此即说明 A_n 是闭集. 再仅需证明 A_n 没有内点, 也就是 $\overline{A_n^c} = C([0,1])$. 但由于

$$A_n^c = \left\{f \in C([0,1]) : \ \forall\, x \in [0,1],\ \sup_{x+h\in[0,1]}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > n\right\},$$

对于每个 $f \in C([0,1])$, 我们总可以用锯齿形函数来逼近它即可得到所要证明的结论. 这样我们便证明了 A_n 是稀疏集, 从而 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ 是第一类型集. 但 $C([0,1])$ 是完备的距离空间, 根据 Baire 定理 $C([0,1])$ 是第二类型集, 因此 D 也是第二类型集.

注　$[0,1]$ 上具有无限全变差的连续函数与处处不可微的连续函数不只是存在而且非常多. 尽管构造反例是相当的困难, 而这一结论并未借助于构造反例. 由此可以认识泛函分析方法的有效性, 也可以加深理解函数的连续性与可微性之间的差异.

§2.7　列紧性、紧性与全有界性

实数域中的每一个有界无限集至少有一个聚点, 这正是所谓的聚点原理. 但是, 在一般的距离空间 (即使是完备的距离空间) 中, 并非每一个有界无限集都有聚点, 这说明一般的距离空间远比实数域复杂. 另一方面, 实数域中有限覆盖定理仅适用于特殊的集合: 有界闭区间; 或更一般地, $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集. 下面将在一般距离空间中研究它们的类似物.

定义 2.55　设 A 是距离空间 X 的子集, 如果 A 中的任何点列都含有子列收敛于 X 中的某一点, 则称 A 为 **列紧的**. 如果 A 中每一个点列都含有子列收敛于 A 中的某一点, 则称 A 是 **自列紧的** (**或紧的**). 若 $\overline{A}$ 为紧集, 则

称 A 为相对紧集. 若距离空间 X 是列紧的 (因而是紧的), 则称 X 是**紧的距离空间**.

例 2.56 (1) 任何距离空间中的有限集都是紧的;

(2) $\mathbf{F}$ 中的有界集必是列紧集;

(3) 若 $X=\mathbf{R}$, $B=[a,b]$, 其中 a, $b\in\mathbf{R}$, 则 B 为 X 中的紧集;

(4) 设 $X=\mathbf{R}$, 则 X 非紧. 因为点列 $\{n\}(n=1, 2, \cdots)$ 不含任何收敛子列;

(5) $L^2([-\pi,\pi])$ 中的三角函数系:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt), \cdots\right\}$$

是有界的, 但其中任意两个元素间的距离都等于 $\sqrt{2}$, 故不可能存在收敛的子列, 因此它不是列紧集.

定理 2.57

(1) 如果 A 是列紧的, 则 $\overline{A}$ 是紧的;

(2) 列紧集的子集也是列紧集.

定理 2.58 如果 X 是完备的距离空间, A 是 X 的闭子集, 则下述条件互相等价:

(1) A 是紧集;

(2) A 中任何点列含有收敛于 A 的子列;

(3) 如果 $A_k\,(k=1, 2, \cdots)$ 是非空闭集, 而且 $A\supset A_1\supset A_2\supset\cdots$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}A_k\neq\emptyset$;

(4) 对于任意的 $r>0$, A 可以用有限个半径为 r 的开球覆盖.

定义 2.59 设 X 为距离空间, A, B 都是 X 的子集, ε 为一给定的正数. 如果对于 A 中任意一点 x, 始终可以找到 B 中一点 y, 使得 $d(x,y)<\varepsilon$, 则称 B 是 A 的一个 **ε 网**.

例 2.60 平面上坐标为整数的一切点组成的集合是平面的一个 1 网. 又如对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 距离空间 X 的任一稠密子集必定是它的 ε 网.

由定义, 所谓 B 为 A 的 ε 网, 实际上是指 A 的任一点 x 必含在 B 的某一点 y 的邻域 $B(y,\varepsilon)$ 中, 或者说, 以 B 中的点为中心, 以 ε 为半径的所有开球的并包含 A.

注 定义中不要求 B 包含在 A 中.

定义 2.61 设 A 是距离空间 X 的子集. 若对于任意给定的 $\varepsilon>0$, A 总存在有限的 ε 网, 则称 A 是**全有界的**.

定理 2.62

(1) 全有界集的子集也是全有界的;

(2) 设 A 为全有界集, 则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 我们可以取 A 的一个有限子集作为 A 的 ε 网;

(3) 全有界集是有界的、可分的.

证明 (1) 的证明是明显的. 反证 (2). 由于 $A \subset X$ 全有界, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, A 有有限的 $\varepsilon/2$ 网 $\{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}\}$, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}$ 都是距离空间 X 中的点. 不妨设对每个 $k = 1, 2, \cdots, n_0$, $A \cap B(x_k, \varepsilon/2) \neq \emptyset$. 否则, 若存在某个 k_0 使得 $A \cap B(x_k, \varepsilon/2) = \emptyset$, 将点 x_{k_0} 除去. 任取 $\tilde{x}_k \in A \cap B(x_k, \varepsilon/2)\,(k = 1, 2, \cdots, n_0)$, 则 $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_{n_0}\}$ 包含在 A 中且为 A 的一个有限 ε 网.

最后证明 (3). 设 X 是给定的距离空间, $A \subset X$ 全有界. 于是可设 $B = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}\}$ 是 A 的一个 1 网, 因此, 对于任意的 $x \in A$, 有 $x_k \in B(1 \leq k \leq n_0)$, 使得 $d(x, x_k) < 1$, 故

$$
\begin{aligned}
d(x, x_{n_0}) &\leq d(x, x_k) + d(x_k, x_{n_0}) \\
&< 1 + \max_{1 \leq k \leq n_0} d(x_k, x_{n_0}) = 1 + K,
\end{aligned}
$$

其中, $K = \max\limits_{1 < k \leq n_0} d(x_k, x_{n_0})$. 因为 K 是有限数, 故 A 有界.

下面证明 A 是可分的. 设 B_n 是 A 的有限 $1/n$ 网, 这里 $n = 1, 2, \cdots$. 因每个 B_n 都是有限集, 令

$$
B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n,
$$

则 B 是可数集. 任取 $x \in A$, 则存在 $x_n \in B_n$, 使得 $d(x, x_n) < 1/n$, 故 B 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 因此 B 在 A 中稠密, 故 A 是可分的.

定理 2.63

(1) 设距离空间 X 的子集 A 是列紧的, 则 A 是全有界的;

(2) 若 X 是完备的距离空间, 则当 A 是全有界集时, A 必定是列紧的. 因此, 在完备的距离空间中, 列紧性与全有界性等价.

证明 定理的证明分两步.

(1) 设 A 为距离空间 X 的列紧集. 如果 A 不是全有界的, 则必存在某个 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 A 没有有限的 ε_0 网. 于是对任意抽取的 $x_1 \in A$, 必存在 $x_2 \in A$ 使得 $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon_0$, 否则 $\{x_1\}$ 就是 A 的一个有限 ε_0 网. 同理, 存

在 $x_3 \in A$ 使得 $d(x_i, x_3) \geq \varepsilon_0 (i = 1, 2)$，否则 $\{x_1, x_2\}$ 就是 A 的一个有限 ε_0 网，这样可以一直进行下去，于是我们得到一个点列 $\{x_n\}$ 使得当 $m \neq n$ 时，$d(x_m, x_n) \geq \varepsilon_0$. $\{x_n\}$ 显然没有收敛的子列，与 A 的列紧性相矛盾，这个矛盾说明 A 为全有界的.

(2) 设 A 为完备的距离空间，$A \subset X$ 为全有界集. 任取 A 中的一个点列 $\{x_n\}$. 如果 $\{x_n\}$ 中只有有限个互不相同的元素，则 $\{x_n\}$ 显然含有收敛的子列. 因此，可设 $\{x_n\}$ 中有无限多个互不相同的元素，记这些元素构成的集合为 B_0. B_0 是全有界的，于是 X 中存在有限个以 $1/2$ 为半径的开球使得这些开球的并包含 B_0. 因此它们中至少有一个开球包含了 B_0 中无限多个元素，这些元素构成的集合记为 B_1，这个开球记为 S_1，即 $B_1 = B_0 \cap S_1$，则 $B_1 \subset S_1$ 且 B_1 是无穷集. B_1 本身也是全有界的，将以上的论证应用于 B_1，则存在 B_1 的子集 B_2，使得 B_2 中含有 B_1 中无限多个元素且 B_2 的直径不大于 $1/2$. 依次类推，我们可以找到一系列的集合 $B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots$ 满足如下条件：$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_k \supset \cdots$，而且 B_k 的直径不大于 $1/2^{k-1}$，每个 B_k 均含有 B_{k-1} 中无限多个元素. 注意到每个 B_k 中的所有元素都是 $\{x_n\}$ 中的某些项，对于 $k = 1$，可取 $\{x_n\}$ 中的某一项 x_{n_1} 使得 $x_{n_1} \in B_1$. 对于 $k = 2$，可取 $\{x_n\}$ 中的某一项 x_{n_2} 使得 $x_{n_2} \in B_2$ 且可设 $n_1 < n_2$. 依次类推，使得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \in B_k$. 根据 B_k 的性质，$\{x_{n_k}\}$ 是基本点列，又因为 X 是完备的，故 $\{x_{n_k}\}$ 在 X 中收敛，于是 A 是列紧的.

推论 2.64 距离空间 X 中的列紧集是有界的、可分的. 特别地，紧集是有界的、可分的.

定理 2.65 (Arzela-Ascoli 定理) (空间 $C([a, b])$ 中集合列紧性的刻画) 集合 $A \subset C([a, b])$ 列紧的充分必要条件是下列两个条件成立

(1) 集合 A 是有界的，即存在常数 M，使得对于任意的 $x \in A$ 恒有

$$|x(t)| \leq M, \quad \forall t \in [a, b];$$

(2) 集合 A 是等度连续的，即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，始终存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得对于任意的 t_1，$t_2 \in [a, b]$，只要 $|t_1 - t_2| < \delta$，就有

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

定理 2.66 任一距离空间中的紧集本身是完备的距离空间. 特别地，紧空间是完备的.

证明 设 A 是距离空间 X 中的紧集，$\{x_n\}$ 是 A 中的一个基本点列. 由 A 的紧性，$\{x_n\}$ 中有收敛于 A 中某一点 x_0 的子列 $\{x_{n_k}\}$. 由于

$$d(x_n,x_0)\le d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x_0),$$

以及当 n 及 k 趋于无穷大时，$d(x_n,x_{n_k})\to 0, d(x_{n_k},x_0)\to 0$, 由此可知 $\{x_n\}\longrightarrow x_0\,(n\to+\infty)$, 故 A 是完备的.

定理 2.67 设 $\{K_n\}$ 为距离空间 X 中的非空紧集构成的集合序列，满足

$$K_1\supset K_2\cdots\supset K_n\supset\cdots,$$

则它们的交 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}K_n$ 非空.

证明 在每个 K_n 中任取一点 x_n, 于是得到点列 $\{x_n\}$. 因 K_1 是紧集，点列 $\{x_n\}$ 中存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 在 K_1 中收敛于某一点 x_0. 对每个给定的 n, 当 $n_k\ge n$ 时，$x_{n_k}\in K_n$. 但 K_n 闭，故 $x_0\in K_n$, 因此，$x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}K_n$.

注 实数的完备性等价于有限覆盖定理，因此，$A\subset\mathbf{R}$ 是紧的，当且仅当 A 是有界闭集. 这一结论对于距离空间中的有界闭集未必成立，但有限覆盖定理却是刻画紧集的一个重要准则.

定理 2.68

(1) 距离空间 X 的子集 A 为紧集的充分必要条件是在 A 的任何一个开覆盖中必可选出一个有限子覆盖;

(2) 集合 $A\subset\mathbf{R}^n$ 为紧集的充分必要条件是 A 为有界闭集.

证明 仅给出 (1) 的证明. 先来证明必要性. 设 A 为紧集，并设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 A 的一个开覆盖. 我们先证明存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对一切 $x\in A$, 开球 $B(x,\varepsilon_0)$ 必包含在某个 G_α 中. 设不然，则对每个自然数 n, 存在 $x_n\in A$, 使得开球 $B(x_n,1/2^n)$ 不包含在任何 G_α 中. 由于 A 是紧的，故 $\{x_n\}$ 中含有收敛于 A 中某一点 x_0 的子列 $\{x_{n_k}\}$. 又由于 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 覆盖 A, 故存在 G_{α_0} 使得 $x_0\in G_{\alpha_0}$. 于是存在开球 $B(x_0,r_0)$ 使得 $B(x_0,r_0)\subset G_{\alpha_0}$. 再取 k 充分大使得 $B(x_{n_k},1/2^{n_k})\subset B(x_0,r_0)$, 故 $B(x_{n_k},1/2^{n_k})\subset G_{\alpha_0}$, 这就同假设矛盾. 因此，确实存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对一切 $x\in A$, 开球 $B(x,\varepsilon_0)$ 必包含在某个 G_α 中，但因 A 是紧的，从而 A 全有界，故从诸 $B(x,\varepsilon_0)$ 中可取出有限个，无妨设为 $B(x_1,\varepsilon_0),B(x_2,\varepsilon_0),\cdots,B(x_l,\varepsilon_0)$ 使得 $\{B(x_k,\varepsilon_0)\}_{k=1}^{l}$ 覆盖 A. 将 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 中包含 $B(x_k,\varepsilon_0)$ 的开集中随便取出一个并且记为 $G_k\,(k=1,\ 2,\ \cdots,l)$. 于是 $\{G_k\}_{k=1}^{l}$ 覆盖 A.

下面来证明充分性．设定理的条件成立，并设 $\{x_n\}$ 是包含在 A 中的一个点列．若 $\{x_n\}$ 中没有子列在 A 中收敛，则对每个 $y\in A$，存在 $\delta_y>0$，以及自然数 n_y 使得当 $n\geq n_y$ 时，$x_n\notin B(y,\delta_y)$．显然 $\{B(y,\delta_y):\ y\in A\}$ 覆盖 A．于是存在 $y_1,y_2,\cdots,y_l\in A$ 使得 $\{B(y_k,\delta_{y_k})\}_{k=1}^{l}$ 覆盖 A．另一方面，当 $n\geq\max\{n_{y_1},n_{y_2},\cdots,n_{y_l}\}$ 时，x_n 不属于任何 $B(y_k,\delta_{y_k})$，因此 x_n 不属于 A．这便同 $\{x_n\}\subset A$ 相矛盾，这表明 $\{x_n\}$ 必有子列在 A 中收敛，故 A 为紧集．

§2.8 紧集上的连续函数

将经典分析中闭区间上连续函数的某些性质推广到一般的紧集上．

定理 2.69 设 X，Y 为距离空间，A 为 X 中的紧集，T 是由 A 到 Y 中的连续映射，则 T 的像 $T(A)$ 是 Y 中的紧集．

证明 设 $\{y_n\}$ 为 $T(A)$ 中的一个点列，则有 A 中的点列 $\{x_n\}$ 使得 $y_n=T(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$．由于 A 是紧集，故在 $\{x_n\}$ 中可以抽取子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 A 中某一点 x_0．但因为 T 是连续的，故

$$\lim_{k\to+\infty}y_{n_k}=\lim_{k\to+\infty}T(x_{n_k})=T(x_0).$$

显然，$T(x_0)\in T(A)$，故 $T(A)$ 是紧集．

定理 2.70 设 X 是距离空间，A 是 X 中的紧集，f 是定义在 A 上的连续函数．则 f 有界并且可以取到其上确界和下确界．

证明 因 $f(A)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的紧集，故为有界闭集．于是 f 有界且其上确界和下确界均属于 $f(A)$．也就是说 f 能够取到它的上确界和下确界．

注 本节有关概念之间的关系如下：在距离空间 (X,d) 中，若 $A\subset X$，则

A 有界 $\Longleftarrow$ A 全有界 $(+X$ 完备$)$ $\Longleftrightarrow$ A 列紧 $(+A$ 闭$)$ $\Longleftrightarrow$ A 紧．

但在 $\mathbf{R}^n$ 中，若 $A\subset\mathbf{R}^n$，则有

A 有界 $\Longleftrightarrow$ A 全有界 $\Longleftrightarrow$ A 列紧 $(+A$ 闭$)$ $\Longleftrightarrow$ A 紧．

例 2.71（有界而非全有界的集合）设 Y 是 l^2 的一个子集

$$Y:=\left\{(x_1,x_2,\cdots)\in l^2:\ \sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2=1\right\}.$$

由 Minkowski 不等式，对于任意的 $x,y\in Y$ 有

$$d(x,y)=\left[\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k-y_k|^2\right]^{1/2}\leq\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|y_k|^2\right)^{1/2}=2.$$

即 Y 的直径 $d(Y)\le 2$. 故 Y 是有界集, 但是 $e_1=(1,0,0,\cdots)$, $e_2=(0,1,0,\cdots)$, $\cdots$, $e_n=(0,0,\cdots,1,0,\cdots)$(第 n 个位置为 1, 其余位置全为 0), $\cdots$ 为一列 l^2 中的元, 而且 $e_n\in Y$, $n=1,2,\cdots$. 显然, 对于任意的自然数 m, n, 当 $m\neq n$ 时, 我们就会有

$$d(e_m,e_n)=(1+1)^{1/2}=\sqrt{2}.$$

假若取 $\varepsilon=1/2$, 则 $B(e_n,1/2)$, $n=1,2,\cdots$ 是一列互不相交的开球, 如果 Y 的 1/2 网 $Y_{1/2}$ 存在, 则对任意的自然数 n 都有 $B(e_n,1/2)\cap Y_{1/2}\neq\emptyset$, 此即意味着 $Y_{1/2}$ 是一个无限集, 所以 $Y_{1/2}$ 不是一个有限的 1/2 网, 故 Y 不是全有界集.

例 2.72 (有界闭集而非紧集) 在 l^2 中, 单位闭球 $A=\overline{B}(\theta,1)$ 是有界闭集. 设 $\{B(x,1/2):\ x\in A\}$ 为 A 的一个开覆盖, 其中不可能有对 A 的有限子覆盖, 故 A 不是紧集. 这是因为点列 $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset A$, 且对任意自然数 m, n, $m\neq n$ 有 $B(e_m,1/2)\cap B(e_n,1/2)=\emptyset$, 而完全覆盖 A 的子集 $\{e_n\}$ 就需要无限多个开球 $\{B(e_n,1/2)\}_{n=1}^{+\infty}$. 这样覆盖 A 就需要无限个开球, 此即说明 A 非紧.

例 2.73 (Arzela-Ascoli 定理的说明) 在距离空间 $(C([0,1]),d_\infty)$ 中, 取子集

$$A=\{f_n:\quad f_n(x)=\sin\frac{\pi}{n}x,\ \ x\in[0,1],\ \ n\in\mathbf{N}\}.$$

因为对任意的 $f_n\in A$, $x\in[0,1]$, 都有 $|f_n(x)|\le 1$, 所以 A 有界.

其次, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\varepsilon/\pi$, 使得对于任意的 x_1, $x_2\in[0,1]$, $f_n\in A$, 而且当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有

$$\begin{aligned}|f_n(x_1)-f_n(x_2)| &= |\sin\tfrac{\pi}{n}x_1-\sin\tfrac{\pi}{n}x_2|\\ &= |2\cos(\tfrac{\pi}{n}\tfrac{x_1+x_2}{2})\sin(\tfrac{\pi}{n}\tfrac{x_1-x_2}{2})|\\ &\le 2|\sin(\tfrac{\pi}{n}\tfrac{x_1-x_2}{2})|\le\tfrac{\pi}{n}|x_1-x_2|<\tfrac{\pi}{n}\tfrac{\varepsilon}{\pi}=\tfrac{\varepsilon}{n}<\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 A 是等度连续的, 故 A 是 $C([0,1])$ 中的列紧集. 若取 $B=\{g_n:\ g_n(x)=nx,\ \ x\in[0,1],\ \ n\in\mathbf{N}\}$, 因为对于任意的 $g_n\in B$, 并不存在常数 $M>0$, 使得 $|g_n(x)|=n|x|<M$, 对任意 $x\in[0,1]$. 这说明 B 不是有界的, 故 B 是非列紧集.

§2.9　不动点定理及其应用

定义 2.74　设 (X,d) 是距离空间，T 是 X 到 X 中的映射．如果存在一个常数 θ $(0<\theta<1)$，使得对所有的 x，$y\in X$，满足下述不等式：

$$d(Tx,Ty)\le\theta\,d(x,y),$$

则称 T 是 X 上的一个**压缩映射**．θ 称为 T 的**压缩系数（因子）**．

压缩映射在几何上的意义是点 x 和 y 经映射后，它们像的距离缩短了，并且不超过 $d(x,y)$ 的 $\theta\,(0\le\theta<1)$ 倍．

在微分方程、积分方程以及其他各类方程的理论中，解的存在性、唯一性以及近似解的收敛性等方面都是很重要的课题．为了证明一个微分方程、积分方程或其他类型方程解的存在性，我们可以将它转换成求某一映射的不动点．

定理 2.75（Banach 压缩映射原理）　设 X 是完备的距离空间，$T:X\to X$ 是一个压缩映射，则 T 在 X 上有唯一的不动点 x^*．即 $Tx^*=x^*$ 也就是说方程 $Tx=x$ 在 X 上有唯一的解．

证明　在 X 中任意取定一点 x_0，并且令 $x_1=Tx_0$，$x_2=Tx_1$，$\cdots,x_n=Tx_{n-1},\cdots$．下面分三步来证明：

(1) 证明 $\{x_n\}$ 是 X 中的一个基本点列．为此考虑

$$d(x_1,x_2)=d(Tx_0,Tx_1)\le\theta\,d(x_0,x_1)=\theta\,d(x_0,Tx_0),$$
$$d(x_2,x_3)=d(Tx_1,Tx_2)\le\theta\,d(x_1,x_2)\le\theta^2\,d(x_0,Tx_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

一般地，可以证明

$$d(x_n,x_{n+1})\le\theta^n\,d(x_0,Tx_0),\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

对任何正整数 p，考虑到

$$\begin{aligned}d(x_n,x_{n+p})&\le d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{n+p-1},x_{n+p})\\&\le(\theta^n+\theta^{n+1}+\cdots+\theta^{n+p-1})\,d(x_0,Tx_0)\\&=\frac{\theta^n(1-\theta^p)}{1-\theta}\,d(x_0,Tx_0)<\frac{\theta^n}{1-\theta}\,d(x_0,Tx_0).\end{aligned}$$

因为 $0 \le \theta < 1$, 所以当 $n \to +\infty$ 时, $\theta^n \longrightarrow 0$. 注意到初始值 x_0 预先选定时 $d(x_0, Tx_0)$ 将是一个常数, 故不管 p 为何值, 只要当 $n \to +\infty$ 时, 就会有

$$d(x_n, x_{n+p}) \longrightarrow 0.$$

故 $\{x_n\}$ 为基本点列. 由 X 的完备性知, 存在 $x^* \in X$, 使得 $x_n \longrightarrow x^*(n \to +\infty)$.

(2) 证明 x^* 为 T 的不动点, 即证 $Tx^* = x^*$. 由于距离空间中极限是唯一的, 因此, 只需证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = Tx^*$. 因为

$$d(Tx^*, x_n) = d(Tx^*, Tx_{n-1}) \le \theta d(x^*, x_{n-1}) \longrightarrow 0\,(n \to +\infty).$$

因此, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = Tx^*$, 从而 $Tx^* = x^*$.

(3) 证明 T 的不动点是唯一的. 用反证法来证明, 假若 T 还有另一个不动点 $x' \in X$, 而且 $x' \ne x^*$. 因为

$$d(x', x^*) = d(Tx', Tx^*) \le \theta d(x', x^*),$$

考虑到 $x' \ne x^*$, 所以 $d(x', x^*) \ne 0$, 因此 $\theta \ge 1$, 这就是一个矛盾.

关于压缩映射原理有以下值得注意的几个方面:

(1) 由证明可以看出, 为了获得不动点 x^* 可以从 X 中的任意一点出发, 这无疑是很方便的.

(2) 方程 $Tx = x$ 的不动点 x^* 在大多数情况下实际上不易求得, 因此往往用 x_n 作为其近似值. 这样就要估计 x_n 与 x^* 的误差. 若用 x_n 近似代替 x^*, 由于 $x_n = Tx_{n-1}$, 则其误差为

$$d(x_n, x^*) \le \frac{\theta^n}{1-\theta} d(x_0, Tx_0).$$

这就是误差估计式.

(3) 在 T 满足 $d(Tx, Ty) < d(x, y)$, $x \ne y$ 的条件下, T 在 X 上不一定存在不动点.

(4) 压缩映射原理中距离空间的完备性不能少.

例 2.76

(1) 令 $Tx = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x$, $x \in \mathbf{R}$, T 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则

$$Tx - Ty = x - y - (\arctan x - \arctan y).$$

根据微分中值定理，必定存在 $\xi \in (x, y)$，使得

$$Tx - Ty = x - y - \frac{x-y}{1+\xi^2} = (x-y)\frac{\xi^2}{1+\xi^2}.$$

故

$$|Tx - Ty| < |x - y|,$$

即

$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

但是，当 $Tx = x$ 时，方程 $\arctan x = \frac{\pi}{2}$ 无解，因此，映射 T 没有不动点.

(2) 设 $X = (0, 1]$ 具有由 $\mathbf{R}$ 诱导出的距离，定义 T 如下：

$$T(x) = \frac{x}{2}.$$

显然它是压缩的，但 T 没有不动点.

从应用的观点来看，因为映射 T 常常不是定义在整个空间 X 上的，而仅仅定义在 X 的子集 X_0 上，而且其像可能不在 X_0 中，因而要对初值 x_0 加以限制

定理 2.77　设 X 是完备的距离空间，$T: X \to X$. 若在闭球 $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X: d(x_0, x) \leq r\}$ 上，$d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y)$ 而且 $d(x_0, Tx_0) < (1-\theta)r$，其中 $0 < \theta < 1$，则 T 在 $\overline{B}(x_0, r)$ 上有唯一的不动点.

证明　仅需说明

$$T(\overline{B}(x_0, r)) \subset \overline{B}(x_0, r), \quad \forall\ x \in \overline{B}(x_0, r).$$

因为

$$\begin{aligned} d(x_0, Tx) &\leq d(x_0, Tx_0) + d(Tx_0, Tx) \\ &\leq (1-\theta)r + \theta d(x_0, x) \\ &\leq (1-\theta)r + \theta r = r. \end{aligned}$$

所以 $Tx \in \overline{B}(x_0, r)$，故 $T(\overline{B}(x_0, r)) \subset \overline{B}(x_0, r)$，即 $T: \overline{B}(x_0, r) \to \overline{B}(x_0, r)$，而且 T 在 $\overline{B}(x_0, r)$ 上是压缩的，此即说明 T 在 $\overline{B}(x_0, r)$ 上有唯一的不动点.

映射 T 不满足压缩映射原理的条件，但是 T 的某次幂却满足这些条件.

定理 2.78 设 (X,d) 是完备的距离空间，X_0 是 X 中的非空闭子集，$T:\ X_0 \longrightarrow X_0$. 若存在自然数 n_0, 使得对于所有的 $x,\ y \in X_0$, 都有

$$d(T^{n_0}x, T^{n_0}y) \le \theta\, d(x,y),$$

其中，$0 \le \theta < 1$. 则 T 在 X_0 上一定存在唯一的不动点.

证明 因为 T^{n_0} 满足压缩映射原理的条件，于是应用该定理，T^{n_0} 在 X_0 上有唯一的不动点 x^*, 也就是 $T^{n_0}x^* = x^*$. 由于

$$T^{n_0}(Tx^*) = T(T^{n_0}x^*) = Tx^*,$$

于是 Tx^* 也是 T^{n_0} 的不动点. 但是 T^{n_0} 的不动点是唯一的, 所以 $Tx^* = x^*$, 故 x^* 也是 T 的不动点.

下面来证明唯一性. 设 x' 是 T 的另一个不动点，则

$$T^{n_0}x' = T^{n_0-1}x' = \cdots = x',$$

因而 x' 也是 T^{n_0} 的不动点. 由于 T^{n_0} 的不动点唯一，所以 $x^* = x'$.

例 2.79 设 f 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的可微映射，而且 $|f'(x)| \le \theta < 1$, 则方程 $f(x) = x$ 存在唯一解 $x^* \in \mathbf{R}$. 进一步，对于任意选取的 $x_0 \in \mathbf{R}$, 迭代点列 $x_n = f(x_{n-1}) \to x^*(n \to +\infty)$, 其误差估计为

$$|x_n - x^*| \le \frac{\theta^n}{1-\theta}|f(x_0) - x_0|.$$

证明 当 $0 \le \theta < 1$ 时，由微分中值定理知

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \le \theta\,|x-y|,$$

也就是有

$$d(f(x), f(y)) \le \theta\, d(x,y),$$

故 f 为完备空间 $\mathbf{R}$ 到自身的压缩映射, 由压缩映射原理可知, 方程 $f(x) = x$ 有唯一解 x^*, 并且对于预先任意选取的初值 $x_0 \in \mathbf{R}$, 有下述误差估计

$$|x^* - x_0| \le \frac{\theta^n}{1-\theta}|f(x_0) - x_0|.$$

例 2.80 求方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 的一个根.

解: 令 $f(x)=x^5+x-1$. 由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中连续并且单调增加, 而且 $f(0)=-1, f(1)=1$. 所以方程 $x^5+x-1=0$ 在 $[0,1]$ 内有且仅有一个根.

如果取初值 $x_0=0$, 并且用 $x_n=1-x_{n-1}^5$ 进行迭代, 则得到近似解 $x_1=1, x_2=0, x_3=1, x_4=0, \cdots$, 但 $\{x_n\}$ 不收敛. 当然, 这是由于映射 $Tx=1-x^5$ 在 $[0,1]$ 上不是压缩映射.

现在改进迭代公式, 引进参数 λ. 当 $\lambda\neq 0$ 时, 显然方程 $x=(1-\lambda)x+\lambda(1-x^5)$ 与原方程 $x^5+x-1=0$ 等价. 无妨取 $\lambda=\frac{1}{6}$, 定义如下映射:

$$g:\ [0,1]\to[0,1],\ \ g(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}(1-x^5).$$

因为 $[0,1]$ 按照 $\mathbf{R}$ 诱导的距离是一个完备的距离空间, $|g'(x)|=|\frac{5}{6}-\frac{5}{6}x^4|\leq\frac{5}{6}$, 故 g 是压缩的, 而且 g 在 $[0,1]$ 中存在唯一的不动点 x^*. 因此, 可以采用如下迭代公式:

$$x_n=\frac{5}{6}x_{n-1}+\frac{1}{6}(1-x_{n-1}^5).$$

若取 $x_0=0.50$, 得到 $x_1=0.58$, $x_2=0.64$, $x_3=0.68$, $x_4=0.71$, $x_5=0.73$, $x_6=0.74$, $x_7=0.75$, $x_8=0.75,\cdots$. 如果取近似解 $x_8=0.75$, 误差为

$$|0.75-x^*|\leq\frac{(\frac{5}{6})^8}{1-\frac{5}{6}}|0.58-0.50|\leq 0.12.$$

例 2.81 (微分方程解的存在性与唯一性) 考虑问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t),\\ x|_{t=t_0}=x_0.\end{cases}\tag{2.9.1}$$

其中, $f(x,t)$ 在平面上连续并且对变量 x 满足 Lipschitz 条件:

$$|f(x,t)-f(y,t)|\leq K|x-y|,$$

$K>0$ 为常数, 则定解问题 (2.9.1) 有唯一解.

证明 分三步来证明.

(1) 定解问题 (2.9.1) 有解与积分方程

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau,\tag{2.9.2}$$

有连续解是等价的.

事实上，若 (2.9.1) 有解 $x = x(t)$, 则它满足微分方程和初始条件

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0.$$

对其两端积分可得

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(x(t), t)\,\mathrm{d}\,t,$$

即

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\,\tau. \tag{2.9.3}$$

此就说明 $x(t)$ 是积分方程 (2.9.2) 的解.

反之，若函数 $x = x(t)$ 是积分方程 (2.9.2) 的解，即 (2.9.3) 成立. 由此可得 $x(t_0) = x_0$. 由连续性可知 $x(t)$ 是可微的，对 (2.9.3) 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}\,t} = f(x(t), t),$$

这表明 $x = x(t)$ 满足微分方程与定解条件.

(2) 我们取 $\delta > 0$, 使得 $K\delta < 1$, 在 t_0 的 δ 邻域 $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ 内 (2.9.2) 有唯一连续解. 用 $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ 表示在区间 $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ 上的全部连续函数组成的空间. 在 $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ 内定义映射 T 为

$$(T\,x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(\tau), \tau)\,\mathrm{d}\,\tau.$$

则

$$\begin{aligned} d(T\,x, T\,y) &= \max_{|t-t_0|\le\delta} \left| \int_{t_0}^{t} [f(x(\tau), \tau) - f(y(\tau), \tau)]\,\mathrm{d}\,\tau \right| \\ &\le \max_{|t-t_0|\le\delta} \int_{t_0}^{t} K\,|x(\tau) - y(\tau)|\,\mathrm{d}\,\tau \\ &\le K\,\delta \max_{|t-t_0|\le\delta} |x(t) - y(t)| = K\,\delta\, d(x, y). \end{aligned}$$

因 $K\,\delta < 1$, 则 T 就是 $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$ 上的压缩映射，由压缩映射原理知，一定存在唯一的 $x_0^*(t) \in C([t_0 - \delta, t_0 + \delta])$, 使得 $T\,x_0^* = x_0^*$, 因此，$x_0^*(t)$ 是定解问题 (2.9.1) 在 $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ 内的解，并且在 $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ 内只有一个满足定解条件的解.

(3) 解的延拓，即证明在 $(-\infty,+\infty)$ 内定解问题 (2.9.1) 有唯一解．再以 $t_0+\delta$（或 $t_0-\delta$）作为初始时刻，求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t), \\ x|_{t=t_0+\delta}=x_0^*(t_0+\delta). \end{cases} \tag{2.9.4}$$

可以把解延拓到 $[t_0,t_0+2\delta]$．而在 $[t_0,t_0+\delta]$ 上，由于解的存在唯一性，(2.9.1) 与 (2.9.4) 的解是相等的．这样继续下去可以将解延拓到 $[t_0-2\delta,t_0+2\delta]$ 上．依此类推，于是可以将解延拓到整个实直线上．

注 在定解问题的存在性与唯一性的证明中还提供了求近似解的方法：

$$x_1(t)=(Tx_0)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x_0(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$x_2(t)=(Tx_1)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x_1(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$x_n(t)=(Tx_{n-1})(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(x_{n-1}(\tau),\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

例 2.82（第二类 Fredholm 积分方程的解）设第二类 Fredholm 线性积分方程

$$x(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s, \tag{2.9.5}$$

其中 λ 为参数，对充分小的 $|\lambda|$，则

(1) 当 $f\in C([a,b])$，$K(t,s)$ 是定义在 $a\le t\le b$，$a\le s\le b$ 内的连续函数时，(2.9.5) 有唯一的连续解 $x(t)\in C([a,b])$，而且 $x(t)$ 是迭代序列

$$x_n(t)=f(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)\,x_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

的极限，其中 $x_0(t)$ 可取 $C([a,b])$ 中的任意函数．

(2) 当 $f\in L^2([a,b])$，积分核 $K(t,s)$ 是定义在 $a\le t\le b$，$a\le s\le b$ 内的可测函数，满足

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s<+\infty,$$

（$K(t,s)$ 是定义在 $a\le t\le b$，$a\le s\le b$ 内的 L^2 可积函数）时，(2.9.5) 有唯一的解 $x\in L^2([a,b])$．

证明 (1) 令 T： $C([a,b]) \to C([a,b])$ 为

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s.$$

由于 $f(t)$、$K(t,s)$ 分别在 $[a,b]$ 和 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续，当 $x \in C([a,b])$ 时，$Tx \in C([a,b])$，即 T 是 $C([a,b])$ 到自身中的映射，并且算子 T 的不动点 x^* 就是积分方程的解. 一般情况下，T 不是压缩映射，但当 $|\lambda| < 1/[M(b-a)]$ 时，T 为压缩映射，其中 $M = \max\limits_{a<t,s<b} |K(t,s)|$. 事实上，对 $C([a,b])$ 中的任意两元素 x，y 有

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= \max_{a\le t\le b} |(Tx)(t) - (Ty)(t)| \\
&= \max_{a\le t\le b} \left|\lambda \int_a^b K(t,s)[x(s) - y(s)]\,\mathrm{d}s\right| \\
&\le \max_{a\le t\le b} |\lambda| \int_a^b |K(t,s)||x(s) - y(s)|\,\mathrm{d}s \\
&\le M\,|\lambda| \max_{a\le s\le b} |x(s) - y(s)| \cdot (b-a) \\
&= M\,(b-a)\,|\lambda|\, d(x,y).
\end{aligned}$$

可见，当 $\theta = M\,(b-a)\,|\lambda| < 1$ 时，T 为压缩映射，由于 $C([a,b])$ 为完备空间，故 T 存在唯一的不动点 x^*，因此，当 $|\lambda| < 1/[M(b-a)]$ 时，积分方程 (2.9.5) 有唯一的连续解.

(2)，令 T： $L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ 为

$$(Tx)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s.$$

由

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left|\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t \\
\le\ &\int_a^b \left[\int_a^b |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s \cdot \int_a^b |x(s)|^2\,\mathrm{d}s\right] \mathrm{d}t \\
=\ &\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \cdot \int_a^b |x(s)|^2\,\mathrm{d}s < +\infty
\end{aligned}$$

及 T 的定义可知，T 是由 $L^2([a,b])$ 到其自身的映射，取 $|\lambda|$ 充分小使得

$$\theta = |\lambda| \left[\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right]^{1/2} < 1,$$

于是

$$\begin{aligned}
d(Tx,Ty) &= \left\{\int_a^b |(Tx)(t)-(Ty)(t)|^2\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2} \\
&= \left\{\int_a^b \left|\lambda\int_a^b K(t,s)(x(s)-y(s))\,\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t\right\}^{1/2} \\
&\le |\lambda|\left\{\int_a^b \left[\int_a^b |K(t,s)|\,|x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\right]^2 \mathrm{d}t\right\}^{1/2} \\
&\le |\lambda|\left\{\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\cdot\int_a^b |x(s)-y(s)|^2\,\mathrm{d}s\right\}^{1/2} \\
&= |\lambda|\left[\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\right]^{1/2} d(x,y) = \theta\, d(x,y).
\end{aligned}$$

故 T 为压缩映射，由不动点原理知，T 存在唯一的不动点 $x^* \in L^2([a,b])$，即积分方程 (2.9.5) 有唯一的平方可积解.

例 2.83 (解线性代数方程组) 设有线性方程组 $x = Ax + b$, 其中 $A = (a_{ij})$ 是 $n\times n$ 矩阵, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 是未知向量, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是已知的 n 维列向量，若矩阵 A 满足条件

$$\theta = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1,$$

则方程组 $x = Ax + b$ 有唯一的解.

证明 令 $X = \mathbf{F}^n$, 对于任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in X$, 定义它们的距离为

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\le k\le n} |x_k - y_k|,$$

对于任意的 $x \in X$, 定义映射 $T:\ X \to X$ 为：$Tx = Ax + b$. 因为

$$\begin{aligned}
d_\infty(Tx,Ty) &= \max_{1\le i\le n}\left|\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i\right) - \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j + b_i\right)\right| \\
&\le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,|x_j - y_j| \\
&\le \max_{1\le j\le n}|x_j - y_j|\cdot\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\cdot d_\infty(x,y)\\
&= \theta\, d_\infty(x,y),
\end{aligned}
$$

故 T 为压缩映射，由 $(\mathbf{F}^n,d_\infty)$ 的完备性知，T 存在唯一的不动点 x^*. 因此，$x^*=Tx^*=Ax^*+b$. 即方程 $x=Ax+b$ 存在唯一的解.

例 2.84 (Volterra 积分方程的解) 设 $K(t,s)$ 是定义在 $a\le t\le b$, $a\le s\le t$ 上的连续函数，则 Volterra 积分方程

$$
x(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s \tag{2.9.6}
$$

对任意的 $f\in C([a,b])$ 以及任意常数 λ 存在唯一的解 $x_0\in C([a,b])$.

证明 作 $C([a,b])$ 到其自身的映射 T:

$$
(Tx)(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s,
$$

用 M 表示 $|K(t,s)|$ 在 $a\le t\le b$, $a\le s\le t$ 上的最大值，d 表示 $C([a,b])$ 中的距离. 对于任意的 x，$y\in C([a,b])$，则有

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(t)-(Ty)(t)| &= |\lambda|\left|\int_a^t K(t,s)\,[x(s)-y(s)]\,\mathrm{d}s\right|\\
&\le |\lambda|\int_a^t |K(t,s)|\,|x(s)-y(s)|\,\mathrm{d}s\\
&\le |\lambda|\,M\,(t-a)\max_{a\le s\le b}|x(s)-y(s)|\\
&= |\lambda|\,M\,(t-a)\,d(x,y),
\end{aligned}
$$

下面用归纳法来证明

$$
|T^n x(t)-T^n y(t)|\le (|\lambda|^n M^n (t-a)^n/n!)\,d(x,y). \tag{2.9.7}
$$

当 $n=1$ 时，不等式 (2.9.7) 已经证明. 现设 $n=k$ 时，不等式 (2.9.7) 成立，则当 $n=k+1$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&|T^{k+1}x(t)-T^{k+1}y(t)|\\
=\ &|\lambda|\left|\int_a^t K(t,s)\,[T^k x(s)-T^k y(s)]\,\mathrm{d}s\right|
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\le \left(|\lambda|^{k+1} M^{k+1}/k!\right) \left|\int_a^t (s-a)^k \, \mathrm{d}s\right| d(x,y) \\ &= \left(|\lambda|^{k+1} M^{k+1} (t-a)^{k+1}/(k+1)!\right) d(x,y), \end{aligned}$$

故不等式 (2.9.7) 对 $n=k+1$ 也成立, 于是对一切自然数 n 成立. 由 (2.9.7),

$$\begin{aligned} d(T^n x, T^n y) &= \max_{a\le t\le b} |T^n x(t) - T^n y(t)| \\ &\le \left(|\lambda|^n M^n (b-a)^n/n!\right) d(x,y). \end{aligned}$$

因为对任何常数 λ 有, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\lambda|^n[M^n(b-a)^n]/n! = 0$, 这样我们始终可以选取足够大的自然数 n 使得, $|\lambda|^n M^n (b-a)^n/n! < 1$ 因此, T^n 是压缩映射, 故方程 (2.9.6) 在 $C([a,b])$ 上有唯一的解.

§2.10 分形空间

本节介绍分形几何中分形空间及拼图定理的建立过程, 以此领会泛函分析的基本思想及其处理问题的方法.

定义 2.85 设 (X,d) 是完备的距离空间, $\mathcal{K}(X)$ 是 X 中非空紧子集的全体. 对于任意一点 $x\in X$ 与任一集 $B\in\mathcal{K}(X)$, 定义

$$d(x,B) := \min\{d(x,y): \quad \forall \ y\in B\},$$

称其为 **x 到 B 的距离**. 对于 A、$B\in\mathcal{K}(X)$, 定义

$$d(A,B) := \max\{d(x,B): \quad \forall \ x\in A\},$$

定义两个子集间的 **Hausdorff 距离** 为

$$h(A,B) := \max\{d(A,B), \ d(B,A)\}.$$

不难验证 $h(A,B)$ 满足通常距离的三个条件, 即 $(\mathcal{K}(X),h)$ 也是一个距离空间, 称 $(\mathcal{K}(X),h)$ 为 X 上的 **分形 (Fractal) 空间**.

注 若 $(X,d)=(\mathbf{R}^2,d)$, 可以把 $\mathcal{K}(X)$ 想象成 X 中全体黑白图形的集合, 即任意一幅图形都可以由 $\mathcal{K}(X)$ 的一个子集来表示, 该子集所有的点都是黑色的, 其他地方是白色的, 两个子集间的 Hausdorff 距离理解为两幅图形之间的距离.

定理 2.86 设 (X,d) 是完备的距离空间，$(\mathcal{K}(X),h)$ 为 X 上的分形空间，则

(1) 对于 A，$B\in\mathcal{K}(X)$，存在 $x_0\in A$，$y_0\in B$，使得

$$d(A,B)=d(x_0,y_0);$$

(2) 对于 $x\in X$，A，$B\in\mathcal{K}(X)$，$B\subset A$，则

$$d(x,B)\geq d(x,A);$$

(3) 对于 A，$B\in\mathcal{K}(X)$，一般来说

$$d(A,B)\neq d(B,A);$$

(4) 对于 A，B，$C\in\mathcal{K}(X)$，$B\subset C$，则

$$d(A,B)\geq d(A,C);$$

(5) 对于 A，B，$C\in\mathcal{K}(X)$，则

$$d(A\cup B,C)=\max\{d(A,C),d(B,C)\};$$

(6) 对于 A，B，$C\in\mathcal{K}(X)$，则

$$d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B);$$

(7) 对于 A，B，C，$D\in\mathcal{K}(X)$，则

$$h(A\cup B,C\cup D)\leq\max\{h(A,C),h(B,D)\};$$

(8) $(\mathcal{K}(X),h)$ 也是完备的距离空间. 若 $\{A_n\}$ 是 $(\mathcal{K}(X),h)$ 中的一个 Cauchy 序列，则对于 $A=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 有如下求法：

$$A=\{x\in X:\quad \text{存在点列}\{x_n:\ x_n\in A_n\}\text{且}\,x_n\to x\}.$$

定义 2.87 设映射 $w_k:\ X\longrightarrow X$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 是完备的距离空间 (X,d) 上的压缩映射，其压缩因子分别为 s_k，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，令 $s=\max\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$，则称 $\{w_k:\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 为 X 上的一个**迭代函数系统 (IFS)**，记作 $\{X;\ w_1,w_2,\cdots,w_n;\ s\}$，称 s 为 **IFS 的压缩因子**.

定理 2.88　设 (X,d) 是完备的距离空间，$(\mathcal{K}(X),h)$ 为 X 上的分形空间，$w:\ X\longrightarrow X$ 是基本空间 (X,d) 上的一个压缩映射，具有压缩因子 s，定义映射 $\widehat{w}:\ \mathcal{K}(X)\longrightarrow\mathcal{K}(X)$ 为

$$\widehat{w}(A)=\{w(x):\ x\in A\},\quad \forall A\in\mathcal{K}(X),$$

则 $\widehat{w}$ 是分形空间 $(\mathcal{K}(X),h)$ 上的压缩映射，并且其压缩因子也为 s，即有

$$h(\widehat{w}(A),\widehat{w}(B))\le s\,h(A,B),\quad \forall A,B\in\mathcal{K}(X).$$

下面介绍的两个重要定理是分形图像压缩的主要原理.

定理 2.89（分形压缩映射的不动点定理）设 (X,d) 是完备的距离空间，$(\mathcal{K}(X),h)$ 为 (X,d) 上的分形空间，$\{X;\ w_1,w_2,\cdots,w_n;\ s\}$ 为 (X,d) 上的一个迭代函数系统.

(1) 若定义映射 $W:\ \mathcal{K}(X)\longrightarrow\mathcal{K}(X)$ 为

$$W(A)=\bigcup_{k=1}^{n}\widehat{w}_k(A),\ \ \forall A\in\mathcal{K}(X),$$

则 W 是分形空间 $(\mathcal{K}(X),h)$ 上的压缩变换，并且其压缩因子为 s，即就是满足

$$h(W(A),W(B))\le s\,h(A,B),\ \ \forall A,B\in\mathcal{K}(X).$$

(2) 压缩映射 W 存在唯一的不动点 $A^*\in\mathcal{K}(X)$，满足

$$A^*=W(A^*)=\bigcup_{k=1}^{n}\widehat{w}_k(A^*),$$

而且此不动点可以通过迭代而得到，即就是

$$A^*=\lim_{n\to+\infty}W^{\circ n}(B),\qquad B\in\mathcal{K}(X),$$

其中 $W^{\circ 0}(B)=B$，而且 $W^{\circ n}(B)=W(W^{\circ n-1}(B))$.

例 2.90　设 $X=(\mathbf{R},d_1)$，$\{\mathbf{R},w_1,w_2\}$ 为迭代函数系统，其中

$$w_1(x)=\frac{1}{3}x,\quad w_2(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3},\ \ \forall x\in X,$$

则 $W(A)=\widehat{w}_1(A)+\widehat{w}_2(A),\ A\in\mathcal{K}(X)$ 为具有压缩因子 $s=1/3$ 的压缩映射．若取 $B=[0,1]$，令 $W^{\circ 0}(B)=B$ 且 $W^{\circ n}(B)=W(W^{\circ n-1}(B))$，则不难证明 $A^*=\lim\limits_{n\to+\infty}W^{\circ n}(B)$ 就是经典的康托尔三分集.

定理 2.91 (拼图定理) 设 (X,d) 是完备的距离空间，$(\mathcal{K}(X),h)$ 为 (X,d) 上的分形空间，对于给定的集合 $L\in\mathcal{K}(X)$ 和常数 $\varepsilon>0$，如果能选取一个迭代函数系统 $\{X;\ w_1,w_2,\cdots,w_n;\ s\}$ $(0<s<1)$，使得

$$h\left(L,\bigcup_{k=1}^{n}\widehat{w}_k(L)\right)\le\varepsilon,$$

则

$$h(L,A^*)<(1-s)^{-1}h\left(L,\bigcup_{k=1}^{n}\widehat{w}_k(L)\right)\le\frac{\varepsilon}{1-s}.$$

其中 h 是 Hausdorff 距离，而 A^* 是该迭代函数系统的不动点 (或称为吸引子).

例 2.92 设迭代函数系统为

$$\left\{\mathbf{R};\ \ w_1(x)=\frac{1}{2}x,\ \ w_2(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2};\ \ s=\frac{1}{2}\right\},$$

它的吸引子为 $[0,1]$. 由于

$$h\left(L,\bigcup_{k=1}^{2}\widehat{w}_k(L)\right)\le\varepsilon,$$

故 $h(L,A^*)\le\varepsilon/(1-s)$. 于是我们可以得到一个拼图 $\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]$.

注 对于给定的一个分形 L，如何求得以它为吸引子的某个迭代函数系统 IFS? 拼图定理定量地的解决了这样的反问题. 由拼图定理可知，为使迭代函数系统 IFS 的吸引子 A^* 与给定的集合 L 相似或相近 (在 Hausdorff 距离下)，必须使得集合 L 与它在此 IFS 下的拼图 $\bigcup\limits_{k=1}^{2}\widehat{w}_k(L)$ 在 Hausdorff 距离下任意接近. 在这里，拼图过程可以认为是集合并的过程，而吸引子与原给定集合之间的误差由拼图的过程确定且由拼图定理定量地给出.

第三章　Banach 空间

泛函分析研究的对象之一是数学、物理和工程中提炼出来的大量线性或非线性问题. 为了有效地研究这些问题, 仅有距离空间的概念是不够的. 本章将介绍具有代数结构的一类空间——Banach 空间, 它们比距离空间具有更丰富的特性.

本章首先介绍线性空间的概念和性质. 在此基础上引进赋范线性空间的概念并讨论其性质. 特别地, 将完备的赋范线性空间称为 Banach 空间. 最后考察有限维赋范线性空间的特性.

§3.1　线 性 空 间

定义 3.1　设 X 是一非空集合, $\mathbf{F}$ 是实数域 $\mathbf{R}$ 或复数域 $\mathbf{C}$, X 称为 $\mathbf{F}$ 上的线性空间, 若以下条件成立: 对于 X 中任意的两个元素 x, y 有唯一的元素 $z\in X$ 与其对应, 称 z 为 x 与 y 的 **和**, 记为 $z=x+y$. 又对于 X 中任意元素 x 及 $\mathbf{F}$ 中任一数 α, 有唯一元素 $u\in X$ 与之对应, 称 u 为数 α 与元素 x 的 **数积**, 记为 $u=\alpha x$. 并且对于任意的 x, y, $z\in X$, α, $\beta\in\mathbf{F}$, 上述的加法与数乘运算满足下列条件:

(1) $x+y=y+x$;

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

(3) X 中存在元素 θ 使得对任一 $x\in X$, $\theta+x=x$, 称 θ 为 X 的 **零元**;

(4) 对任何 $x\in X$, 存在加法逆元 $-x$, 使得 $x+(-x)=\theta$;

(5) $1\cdot x=x$,　$0\cdot x=\theta$;

(6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;

(7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;

(8) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

则称 X 是数域 $\mathbf{F}$ 上的 **线性空间**. 特别地当 $\mathbf{F}$ 为实 (或复) 数域时, 称 X 为实 (或复) 的线性空间.

例 3.2　距离空间 $\mathbf{F}^n$ 、$C^k([a,b])$ 、$L^p([a,b])$ 、l^p 和 $L^p([a,b])(p\geq 1)$ 按自然方式定义加法和数乘都是线性空间.

例 3.3　设 $c:=\{(x_1,x_2,\cdots):\ x_n\in\mathbf{F},\ \lim\limits_{n\to+\infty}x_n\ 存在\}$. 类似地,

可以用 c_0 表示 $\mathbf{F}$ 中收敛于零的数列全体构成的集合，按自然方式定义加法和数乘，c 和 c_0 都是线性空间.

定义 3.4 设 X 是 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，M 是 X 的一个非空子集. 如果对于任意的 x、$y \in M, \alpha$、$\beta \in \mathbf{F}$, 就有 $\alpha x+\beta y \in M$, 则称 M 是 X 的**线性子空间 (简称子空间)**.

注 $\{\theta\}$ 与 X 是 X 的子空间. 异于 $\{\theta\}$ 和 X 的子空间称为 X 的**真子空间**.

定义 3.5 设 X 是 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，$x \in X$. 如果存在数 α_1、α_2、$\cdots$、$\alpha_n \in \mathbf{F}$，x_1，x_2，$\cdots$，$x_n \in X$, 使得

$$x=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n,$$

则称 x 是 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的**线性组合**.

定义 3.6 设 X 是 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，x_1、x_2，$\cdots$，$x_n \in X$. 如果存在不全为零的数 α_1，α_2，$\cdots$，$\alpha_n \in \mathbf{F}$, 使得

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n=0, \tag{3.1.1}$$

则称向量组 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 是**线性相关的**, 否则称为**线性无关的**, 即若 (3.1.1) 成立，必定可以导致 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$, 则 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 是线性无关的.

定义 3.7 如果在线性空间 X 中可以找到 n 个线性无关的向量，而任意 $n+1$ 个向量都线性相关，则称 X 为 n **维线性空间**. n 称为 X 的**维数**, 记作 $\dim X=n$. 如果对所有的自然数 n, X 中有 n 个线性无关的向量，则称 X 是**无限维的**, 记作 $\dim X=+\infty$. n 维线性空间 X 中由 n 个向量组成的线性无关向量组称为 X 的**基**.

线性空间 $\mathbf{F}^n$ 是有限维空间. $\{x^n: \quad n=0, 1, 2, \cdots\}$ 在 $C^k([a,b])$ 和 $L^p([a,b])$ 中都是线性无关的，因此这些空间都是无限维空间. 类似地，$e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$, 其中第 n 个分量为 1 其余全为 0, 在空间 $l^p(p \geq 1)$ 中也都是线性无关的，因此 $l^p(p \geq 1)$ 也都是无限维空间.

定义 3.8 设 A 是线性空间 X 的子集，X 中包含 A 的最小线性子空间，称为由 A **生成的子空间**或 A 的**线性包**, 记作 $\operatorname{span} A$. 因此,

$$\operatorname{span} A=\left\{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k: \quad \alpha_k \in \mathbf{F}, \ x_k \in A, \ k=1,2,\cdots,n, \ n \in \mathbf{N}\right\}.$$

定义 3.9 线性空间 X 的一个子空间 M 对某个向量 $x_0 \in X$ 的平移称为 **线性流形或仿射集**. 即 $L = M + x_0 = \{x + x_0: \ x \in M\}$ 是 X 中的线性流形, 其中 M 是 X 的子空间.

线性空间 X 的极大真仿射集 L 称为 X 的 **超平面**. 即 $L = M + x_0 = \{x + x_0: \ x \in M\}$, 其中 M 是 X 的极大子空间. M 是极大的意味着除线性空间 X 本身外没有其他的子空间包含 M.

例 3.10 $\mathbf{R}^3$ 中不经过零点的直线和平面都是仿射集. $\mathbf{R}^2$ 中的超平面是直线; $\mathbf{R}^3$ 中的超平面是平面.

定义 3.11 设 X 是线性空间, $x, y \in X$, $A \subset X$. 集合

$$L(x, y) := \{\lambda x + (1 - \lambda)y: \quad 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

称为以 x, y 为端点的 **区间或线段**. 记作 $L(x, y)$. 若对于任意的 $x, y \in X$ 及数 $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$, 恒有 $\alpha x + (1 - \alpha)y \in A$, 则称 A 为 X 中的一个 **凸集**. $\alpha x + (1 - \alpha)y$ 称为 x 与 y 的 **凸组合**.

定义 3.12 设 X 与 Y 是同一数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间, $T: \ X \longrightarrow Y$. 如果对于任意的 α, $\beta \in \mathbf{F}$ 和任意的 x, $y \in X$, 满足下述叠加原理:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y.$$

则称 T 为 **线性映射、线性算子或线性变换**. 特别地, 当 $Y = \mathbf{F}$ 时, 称线性算子 T 为 **线性泛函**

定义 3.13 设 X 与 Y 是同一数域 $\mathbf{F}$ 上的两个线性空间. 若 $T: \ X \to Y$ 是一个线性映射且是双射, 则称 T 为 X 到 Y 的 **线性同构映射**, 这时称 X 与 Y **线性同构**.

例 3.14 在 $\mathbf{R}^n$ 中, 取 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 对于任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

确定了一个线性泛函.

例 3.15 在 $C([a, b])$ 中, 由定积分

$$f(x) = \int_a^b x(t) \, \mathrm{d}t, \quad x \in C([a, b])$$

确定了一个线性泛函.

例 3.16 对于任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^p$, $f_k(x)=x_k$, $k=1$, 2, $\cdots$ 确定了 l^p 上的一些线性泛函.

§3.2 赋范线性空间与 Banach 空间

定义 3.17 设 X 是数域 $\mathbf{F}$ 上的一个线性空间. 如果对于 X 中每个元素 x, 按照一定的法则对应于一个实数 $\|x\|$, 而且对于任意的 x, $y\in X$ 和 $\alpha\in\mathbf{F}$, 下述三条范数公理被满足:

(1) 正定性: $\|x\|\geq 0$; 而且 $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$;

(2) 绝对齐次性: $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$;

(3) 三角不等式: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

则称 $(X,\|\cdot\|)$ 为 **赋范线性空间**. $\|x\|$ 称为元素 x 的 **范数**. 通常, 在范数已被理解的情况下, $(X,\|\cdot\|)$ 可以简单记作 X. 在赋范线性空间 X 中, 我们可以用 $d(x,y)=\|x-y\|$, 定义元素 x 与 y 之间的距离. 显然, $(X,\|\cdot\|)$ 成为一个距离空间. X 中的点列 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛于点 x, 是指: $d(x_n,x)=\|x_n-x\|\longrightarrow 0\,(n\to+\infty)$. 自然地称 **$\{x_n\}$ 依范数收敛于 x**, 有时也称 **$\{x_n\}$ 强收敛于 x**. 记作 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$, 或 $\{x_n\}\xrightarrow{\text{强}}x\,(n\to+\infty)$.

注

(1) 范数 $\|x\|$ 是 $x\in X$ 的连续函数, 其次, 若 $\{x_n\}\subset X$ 依范数收敛于 $x\in X$, 则 $\{\|x_n\|\}$ 有界. 可以证明

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leq\|x-y\|,\quad\forall\ x,\ y\in X.$$

因此对 X 中的元素 $x_n\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 及 x, 恒有

$$\big|\|x_n\|-\|x\|\big|\leq\|x_n-x\|.$$

故当 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n-x\|=0$ 时, 有 $\|x_n\|\longrightarrow\|x\|\,(n\to+\infty)$. 因此, 范数 $\|x\|$ 是 x 的连续函数. 由 $\|x_n\|\longrightarrow\|x\|\,(n\to+\infty)$ 可知, $\{\|x_n\|\}$ 有界.

(2) 设 x_n, $y_n\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$, x, $y\in X$, 而且 $x_n\longrightarrow x$, $y_n\longrightarrow y\,(n\to+\infty)$, 则 $x_n+y_n\longrightarrow x+y\,(n\to+\infty)$. 这由不等式

$$\|x_n+y_n-(x+y)\|\leq\|x_n-x\|+\|y_n-y\|,$$

立即可得.

(3) 设数列 $\{\alpha_n\} \longrightarrow \alpha\,(n\to+\infty)$, $x_n\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 及 x 都是 X 中的元素并且 $x_n \longrightarrow x\,(n\to+\infty)$, 则 $\alpha_n x_n \longrightarrow \alpha x\,(n\to+\infty)$. 因为

$$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n-\alpha x\| &\le \|\alpha_n x_n-\alpha_n x\|+\|\alpha_n x-\alpha x\|\\ &= |\alpha_n|\,\|x_n-x\|+|\alpha_n-\alpha|\,\|x\|.\end{aligned}$$

以及 $\{|\alpha_n|\}$ 的有界性, $\|x_n-x\|\longrightarrow 0\,(n\to+\infty)$, $|\alpha_n-\alpha|\longrightarrow 0\,(n\to+\infty)$, 立即可得.

定义 3.18 如果赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中的点列 $\{x_n\}$ 满足 Cauchy 条件: $\lim\limits_{m,n\to+\infty}\|x_m-x_n\|=0$, 则称 $\{x_n\}$ 为 $(X,\|\cdot\|)$ 中的 **Cauchy 点列或基本点列**. 若 X 中所有的 Cauchy 点列恒收敛, 则称 X 是 **完备的**, 而且称 $(X,\|\cdot\|)$ 为 **Banach 空间**.

注 收敛点列必为 Cauchy 点列, Banach 空间中的 Cauchy 点列都收敛, Banach 空间正是使得 Cauchy 收敛原理成立的赋范线性空间. Cauchy 收敛原理表明 $\mathbf{F}$ 是 Banach 空间.

例 3.19 空间 $\mathbf{R}^n$ 是 Banach 空间.

证明 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义元素 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的相加与数乘为

$$x+y:=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\alpha x:=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),$$

则 $\mathbf{R}^n$ 是一个线性空间. 在 $\mathbf{R}^n$ 中定义范数

$$\|x\|_2:=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2},$$

则 $\mathbf{R}^n$ 构成一个赋范线性空间. 这样引入的范数称为 **欧几里得范数**, 所形成的空间称为 **欧几里得空间**. $\mathbf{R}^n$ 中的强收敛等价于按坐标收敛, 而且 $\mathbf{R}^n$ 是 Banach 空间.

例 3.20

(1) 空间 $l^p\,(1\le p<+\infty)$ 是 Banach 空间. 对于任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots)\in l^p$, $\alpha\in\mathbf{F}$, 定义加法和标量乘法为

$$x+y:=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots),\alpha x:=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots).$$

在 l^p 中定义如下的范数:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

可以证明 $(l^p, \|\cdot\|_p)(1 \le p < +\infty)$ 是 Banach 空间.

(2) 空间 $L^p([a,b])\,(1 < p < +\infty)$ 是 Banach 空间. 在 $L^p([a,b])$ 中定义如下的范数:

$$\|x\|_p := \left[\int_a^b |x(t)|^p \,\mathrm{d}\,t\right]^{1/p}.$$

可以证明 $(L^p, \|\cdot\|_p)(1 \le p < +\infty)$ 是 Banach 空间.

例 3.21 连续函数空间 $C([a,b])$ 是 Banach 空间.

证明 在 $C([a,b])$ 中, 定义元素 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的相加以及标量 α 与元素 $x(t)$ 的相乘为

$$(x+y)(t) := x(t) + y(t), \quad (\alpha\, x)(t) := \alpha\, x(t),$$

容易知道, $C([a,b])$ 是一个线性空间. 再在 $C([a,b])$ 中定义范数

$$\|x\|_\infty := \max_{a \le t \le b} |x(t)|, \quad x(t) \in C([a,b]),$$

可以证明 $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ 是一个 Banach 空间.

例 3.22 $[a,b]$ 上所有有界变差函数全体记作 $BV([a,b])$. $BV([a,b])$ 按照通常方式规定线性运算构成线性空间. 对于每个有界变差函数 $x(t)$, 令

$$\|x\| = |x(a)| + V_a^b(x),$$

其中 $V_a^b(x)$ 表示函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差, 则 $\|\cdot\|$ 是一个范数. 可以证明 $(BV([a,b]), \|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间.

例 3.23 空间 $C^k([a,b])$ 是 Banach 空间. 这里 $C^k([a,b])$ 表示在 $[a,b]$ 上具有直到 k 阶连续导数的一切函数构成的集合. $C^k([a,b])$ 中的加法、数乘同例 3.21, 于是 $C^k([a,b])$ 是一个线性空间. 在 $C^k([a,b])$ 中定义如下的范数:

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{a \le t \le b} |x^{(i)}(t)|, \quad x^{(0)}(t) = x(t) \in C^k([a,b]),$$

则 $(C^k([a,b]),\|\cdot\|)$ 是一个赋范线性空间，而且在 $C^k([a,b])$ 中 $\{x_n(t)\}$ 强收敛于 $x(t)$ 等价于 $x_n(t)$ 的直到 k 阶导数分别一致收敛于 $x(t)$ 的相应导数．可以证明 $C^k([a,b])$ 是一个 Banach 空间．

注　对于赋范线性空间，都可以由范数引入距离：$d(x,y)=\|x-y\|$，使其成为距离空间，并且这个距离一定满足条件

$$d(x,y)=d(x-y,\theta),\quad d(\alpha x,\theta)=|\alpha|\,d(x,\theta). \tag{3.2.1}$$

自然问，一般的距离空间都能成为赋范线性空间吗？因为在一般的距离空间中元素之间并不一定有线性运算，因此，一般的距离空间不一定是赋范线性空间．具有线性运算的距离空间称为线性距离空间．(3.2.1) 式是线性距离空间成为赋范线性空间的充分必要条件，但应当注意，线性距离空间中的距离不一定都满足 (3.2.1) 式．

例 3.24　所有数列构成的线性距离空间 s 不能成为赋范线性空间．

证明　因为 s 中的距离为

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}.$$

取 $x=(1,1,\cdots)$，$\theta=(0,0,\cdots)$，则

$$2x=(2,2,\cdots).\quad d(x,\theta)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

$$d(2x,\theta)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3},$$

由此可以得到

$$d(2x,\theta)\neq 2\,d(x,\theta).$$

故空间 s 按上述距离构成的线性距离空间不能成为赋范线性空间．

在赋范线性空间 X 中可以研究无穷级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty}x_k=x_1+x_2+\cdots+x_n+\cdots, \tag{3.2.2}$$

其中 $x_k\in X$．如果 (3.2.2) 的部分和

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

收敛, 即存在 $x \in X$, 使得 $S_n \longrightarrow x\,(n \to +\infty)$, 则称 x 为级数 (3.2.2) 的和, 记作 $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k$.

定理 3.25

(1) 设 X 是 Banach 空间, Y 是 X 的子空间. 则 Y 自身是 Banach 空间的充分必要条件是 Y 为 X 的闭子空间.

(2) 设 X 是 Banach 空间且级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\| + \cdots \tag{3.2.3}$$

收敛, 则级数

$$\sum_{k=1}^{+\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots \tag{3.2.4}$$

收敛且

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\|.$$

此外, 如果在一个赋范线性空间 X 中, 当任意无穷级数 (3.2.3) 收敛时必可以推出级数 (3.2.4) 收敛, 则空间 X 一定是 Banach 空间.

证明 (1) 的证明是平凡的. 仅证明 (2). 设级数 (3.2.3) 收敛且级数 (3.2.4) 的前 n 项和为 $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 对于任意的自然数 p, 有

$$\begin{aligned} & \|S_{n+p} - S_n\| \\ = \; & \|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}\| \\ \leq \; & \|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \cdots + \|x_{n+p}\|. \end{aligned}$$

因为级数 (3.2.3) 收敛, 因此 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 点列, 但因 X 是完备的, 因而级数 (3.2.4) 收敛. 又因为有不等式

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|.$$

在其两边令 $n \to +\infty$, 则有

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\|.$$

此外，假设空间 X 中任意级数 (3.2.3) 收敛时必定可以推知级数 (3.2.4) 收敛. 取 X 中的任一 Cauchy 点列 $\{x_n\}$. 我们从 $\{x_n\}$ 中选取子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, \ 2, \ \cdots.$$

于是级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ 收敛，所以级数

$$\begin{aligned} & x_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \\ = \ & x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) + \cdots \end{aligned}$$

必定收敛，其前 p 项的部分和是 x_{n_p}. 可以设 $x_{n_p} \longrightarrow x \, (p \to +\infty)$, 于是，存在 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛. 由于 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列，对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 当 m、$n > N$ 时，有 $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, 因此，对于充分大的 k, $\|x_n - x_{n_k}\| < \varepsilon$. 在上式两端让 $k \to +\infty$, 则当 $n > N$ 时，有 $\|x_n - x\| \le \varepsilon$, 所以 $\{x_n\}$ 收敛，这就说明 X 是完备的.

定义 3.26　设 X 是一个无限维的 Banach 空间，点列 $\{e_n : \ n \in \mathbf{N}\} \subset X$. 若 X 中的任何一个元素 x 都可以唯一地表示为

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \, e_k,$$

其中 ξ_k 为仅与 x 有关的标量，而右端的级数依 X 中的范数收敛. 则称 $\{e_n : \ n \in \mathbf{N}\}$ 为 X 的一个 **Schauder 基**.

例 3.27　令 $X = l^p (1 \le p < +\infty)$. 设 $e_1 = (1, 0, 0, \cdots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots)$, $\cdots$, $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$, e_n 的第 n 项为 1, 而其余各项全为 0. 则 $\{e_n\}$ 是 l^p 的一个 Schauder 基.

证明　设 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, \cdots) \in l^p$, 则

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k \, e_k \right\| &= \|(0, \cdots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots)\| \\ &= \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 \, (n \to +\infty). \end{aligned}$$

故

$$x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k \, e_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \, e_k.$$

其次，如果 x 还可以表示成 $x=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\xi_k' e_k$，其中右端的级数按 l^p 中的范数收敛．于是，对于任给的自然数 n，由不等式

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k-\sum_{k=1}^{n}\xi_k' e_k\right\|\leq\left\|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k-x\right\|+\left\|x-\sum_{k=1}^{n}\xi_k' e_k\right\|,$$

可知，当 $n\to+\infty$ 时，$\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k-\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k' e_k\right\|\longrightarrow 0$，即

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\xi_k'|^p\right)^{1/p}\longrightarrow 0.$$

故 $\xi_k=\xi_k'\,(k=1,\ 2,\ \cdots)$，这说明 x 的表示是唯一的，因此 $\{e_n\}$ 是 l^p 的一个 Schauder 基．

注

(1) 若空间 X 有 Schauder 基，则 X 是可分的

因为

$$A=\left\{\sum_{k=1}^{n}r_k e_k:\quad r_k\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\ \text{为有理数},\ n\in\mathbf{N}\right\},$$

是可数集且在 X 中稠密，故 X 是可分的．

(2) 任一可分 Banach 空间不一定存在 Schauder 基．

1973 年 Per Enflo 构造了一个不具有 Schauder 基的可分 Banach 空间．

(3) 任何赋范线性空间必定存在完备化空间；一个赋范线性空间的所有完备化空间互相等距同构，因此本质上是唯一的．

§3.3 有限维赋范线性空间

定义 3.28 设 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 都是线性空间 X 上的两个范数，如果它们能够定义相同的收敛性，即

$$\|x_n-x\|_1\longrightarrow 0\,(n\to+\infty)\Longleftrightarrow\|x_n-x\|_2\longrightarrow 0\,(n\to+\infty).$$

则称 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 **等价的**．若对于 X 中的任意点列 $\{x_n\}$，当 $\|x_n\|_1\longrightarrow 0\,(n\to+\infty)$ 时，有 $\|x_n\|_2\longrightarrow 0\,(n\to+\infty)$，则称 **范数 $\|\cdot\|_1$ 比范数 $\|\cdot\|_2$ 强**．



数据加载失败，请稍后重试！

对任意一个 $x \in X$, 有 $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, 从而有

$$\|x\| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|e_k\| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2\right)^{1/2} = \alpha \|x\|_2,$$

其中, $\alpha = (\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2)^{1/2}$. 因为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 X 的一个基底, $e_k \neq 0 (k = 1, 2, \cdots, n)$, 故 $\|e_k\| > 0$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 因而 $\alpha > 0$, 令 $C_1 = 1/\alpha$, 则对任意的 $x \in X$, 恒有 $C_1 \|x\| \le \|x\|_2$.

我们可以建立 X 到 $\mathbf{R}^n$ 上的一一对应关系:

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = (x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

在 $\mathbf{R}^n$ 上定义一个函数

$$f(\xi) = f[(x_1, x_2, \cdots, x_n)] = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| = \|x\|.$$

对函数 $f(\xi)$, 先证明下面两点

(1) $f(\xi)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是连续的.

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意两点 $\xi = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\eta = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, X 中相对应的两点为

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k,$$

于是有

$$\begin{aligned} |f(\xi) - f(\eta)| &= |\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) e_k\right\| \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2\right)^{1/2} \\ &= \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2\right)^{1/2} = \alpha \|\xi - \eta\|. \end{aligned}$$

因此, $f(\xi)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续.

(2) 设 $\mathbf{R}^n$ 的单位球面为

$$S := \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_k \in \mathbf{R},\ k = 1, 2, \cdots, n,\ \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2} = 1\right\}.$$

下面说明 f 在 S 上取值总大于某个正的常数 β, 即当 $\xi \in S$ 时有 $f(\xi) \geq \beta > 0$. 设 $\xi = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S$, 则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 不全为零. 由于 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 X 的一个基, 故 $x = \sum\limits_{k=1}^n x_k e_k \neq 0$. 因此, $\|x\| = \left\|\sum\limits_{k=1}^n x_k e_k\right\| > 0$, 即 $f(\xi) > 0$. 令 $\beta = \inf\limits_{\xi \in S} f(\xi)$, 下面证明 $\beta > 0$. 因为 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集, 所以 S 是紧集, 而在紧集上的连续函数必取得最小值, 故存在 $\xi_0 \in S$, 使得 $f(\xi_0) = \beta$. 又因为 $f(\xi)$ 在 S 上取值均大于零, 故 $\beta > 0$.

对于 X 中的任一非零元素 $x = \sum\limits_{k=1}^n x_k e_k$, 令

$$x' = \frac{x}{\left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}} = \sum_{k=1}^n x'_k e_k,$$

其中 $x'_k = x_k \Big/ \left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$, 故 $\xi' = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \in S$. 而且

$$\|x'\| = \frac{\|x\|}{\left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}} = f(\xi') \geq \beta.$$

令 $C_2 = 1/\beta$, 则有

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2} \leq C_2 \|x\|.$$

这样就证明了存在 $C_1, C_2 > 0$, 使得对于 X 中任意一点 $x = \sum\limits_{k=1}^n x_k e_k$ 始终成立不等式: $C_1 \|x\| \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|$.

定义 3.31 (线性拓扑同构) 设 X, Y 都是赋范线性空间, $T: X \to Y$. 如果下面两个条件满足,

(1) T 是从 X 到 Y 的线性同构映射;

(2) T 及 T^{-1} 都是连续映射.

则称赋范线性空间 X 与 Y**线性拓扑同构**.

推论 3.32 $\mathbf{F}$ 上所有 n 维赋范线性空间都线性拓扑同构, 更精确地说, n 维赋范线性空间 X 与 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 线性拓扑同构.

证明 任取 X 中的一个基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 设 $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \in X$, 将 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看成 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 中的点, 作 X 到 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 的映射 T: $Tx = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 显然 T 是 X 到 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 上的线性同构映射. 于是 T^{-1} 存在, 对任何 x, $y \in X$, 根据等价范数定理可知存在常数 C_1, $C_2 > 0$, 满足下述不等式:

$$C_1 \|x - y\| \leq \|Tx - Ty\| \leq C_2 \|x - y\|.$$

今设 $\{x_m\} \subset X$ 收敛于 $x_0 \in X$, 则有: $\|Tx_m - Tx_0\| \leq C_2 \|x_m - x_0\|$. 故 $\{Tx_m\}$ 收敛于 Tx_0, 即 T 连续. 同样可以证明 T^{-1} 也是连续的, 故 X 与 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 线性拓扑同构.

推论 3.33

(1) 任一 n 维赋范线性空间必为 Banach 空间;

(2) 任一赋范线性空间 X 的有限维子空间必为 Banach 空间, 因而是 X 的闭子空间;

(3) 有限维赋范线性空间中的有界闭集是紧集.

定理 3.34 (Riesz 引理) 设 Y 是赋范线性空间 X 的真闭子空间, 则对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 恒存在 $x_0 \in X$, $\|x_0\| = 1$, 使得不等式 $\|x - x_0\| \geq 1 - \varepsilon$ 对一切 $x \in Y$ 成立, 也就是

$$\inf\{\|x - x_0\|: \quad x \in Y\} \geq 1 - \varepsilon.$$

证明 因为 Y 是 X 的真闭子空间, 故存在 $x_1 \in X - Y$. 令 $d = \inf\limits_{x \in Y} \|x - x_1\|$. 因为 Y 是 X 的闭子空间, 故 $d > 0$. 这是因为如果 $d = 0$, 则存在 $\{z_n\} \subset Y$, $\|x_1 - z_n\| \longrightarrow d = 0 (n \to +\infty)$, 也就有 $z_n \longrightarrow x_1 \in \overline{Y} = Y$, 这与 $x_1 \notin Y$ 矛盾. 现在任意选取 $0 < \varepsilon < 1$, 于是 $d/(1 - \varepsilon) > d$, 根据下确界的定义, 存在 $x_1' \in Y$, 使得 $\|x_1 - x_1'\| < d/(1-\varepsilon)$, 再令 $x_0 = x_1 - x_1'/\|x_1 - x_1'\|$, 则 $\|x_0\| = 1$, 并且对任一 $x \in Y$, 我们有

$$\|x - x_0\| = \|x - \frac{x_1 - x_1'}{\|x_1 - x_1'\|}\| = \frac{1}{\|x_1 - x_1'\|} \|(\|x_1 - x_1'\|x + x_1') - x_1\|,$$

由于 $\|x_1 - x_1'\|x + x_1' \in Y$, 故

$$\|(\|x_1 - x_1'\|x + x_1') - x_1\| \geq d,$$

于是

$$\|x - x_0\| \geq \frac{d}{\|x_1 - x_1'\|} > 1 - \varepsilon.$$

定理 3.35 若赋范线性空间 X 中的单位球面是紧集，则 X 是有限维的.

证明 用反证法来证明. 设 X 是无限维的，令 $S := S_1(0) = \{x : \|x\| = 1\}$ 为单位球面，选取 $x_1 \in S$，令 $Y_1 = \text{span}\{x_1\}$，则 Y_1 是 1 维闭子空间，由 Riesz 引理，存在 $x_2 \in S$，使得对任意 $y \in Y_1$，$\|y - x_2\| \geq 1/2$. 设 $Y_2 = \text{span}\{x_1, x_2\}$，则 Y_2 是 2 维闭子空间，$Y_2 \neq X$，再由 Riesz 引理，存在 $x_3 \in S$，使得对任意的 $y \in Y_2$，$\|y - x_3\| \geq 1/2$. 用数学归纳法，可以找到点列 $\{x_n : n \in \mathbf{N}\} \subset S$，使得当 $m \neq n$ 时，$\|x_m - x_n\| \geq 1/2$，此点列的任一子点列都不是 Cauchy 列，因而没有收敛的子点列，这与 S 为紧集的假设矛盾，因此 X 是有限维的.

推论 3.36 对赋范线性空间 X，下述几条等价：

(1) X 是有限维的；

(2) X 中的单位球面是紧集；

(3) X 中的单位闭球 $\overline{B}(0, 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ 是紧集；

(4) X 中所有的有界闭集是紧集.

第四章　Hilbert 空间

一个重要的 Banach 空间类是 Hilbert 空间类, 它的主要特征是范数具有同空间的代数结构相联系的很有用的某些附加性质. 本章将介绍此类空间, 通过自然的类比, 将通常的几何概念, 比如角度、垂直等等都引进到此类空间中来. 在此基础上建立 Hilbert 空间上的 Fourier 分析理论.

§4.1　内积空间的基本概念

定义 4.1　设 X 是数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间. 若存在映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X\longrightarrow\mathbf{F}$ 满足下述三个条件: 对于任意的 $x,\ y,\ z\in X,\alpha,\ \beta\in\mathbf{F}$,

(1) 对第一变元的线性: $\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$,

(2) 共轭对称性: $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$;

(3) 正定性: $\langle x,x\rangle\geq 0$; 而且 $\langle x,x\rangle=0\Longleftrightarrow x=0$;

则称 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 X 上的 **内积 (inner product)**, 并称 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为 **内积空间**. 通常, 在内积已被理解的情况下, $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 可以简单记作 X. 当 $\mathbf{F}$ 为实数域时称为 **实内积空间**; 当 $\mathbf{F}$ 为复数域时称为 **复内积空间**. 由 (1) 和 (2) 可以推出内积还具有以下性质:

(4) 对第二个变元的共轭线性: $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\overline{\alpha}\langle x,y\rangle+\overline{\beta}\langle x,z\rangle$;

(5) $\langle x,0\rangle=\langle 0,y\rangle=0$.

例 4.2　设 $X=\mathbf{R}^n$, 定义内积为

$$\langle x,y\rangle:=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k,\quad\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X.$$

容易验证 $(\mathbf{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个实内积空间.

例 4.3　设 $X=\mathbf{C}^n$, 定义内积为

$$\langle x,y\rangle:=\sum_{k=1}^{n}x_k \overline{y_k},\quad\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X.$$

容易验证 $(\mathbf{C}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个复内积空间.

例 4.4 设 X 是实 l^2 空间，定义内积为

$$\langle x,y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k,\quad \forall\, x=(x_1,x_2,\cdots),\quad y=(y_1,y_2,\cdots)\in X.$$

由 Hölder 不等式，上式中右端的级数是收敛的，并且容易验证 $(l^2,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间. 当 X 是复 l^2 空间时，定义内积为

$$\langle x,y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, \overline{y_k},\quad \forall\, x=(x_1,x_2,\cdots),\quad y=(y_1,y_2,\cdots)\in X.$$

容易验证 $(l^2,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间.

例 4.5 设 X 是实 $L^2(\Omega)$ 空间，定义下述内积：

$$\langle f,g\rangle := \int_{\Omega} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall\, f,\ g\in L^2(\Omega).$$

由 Hölder 不等式，$f(t)g(t)$ 是可积的，并且容易验证 $(L^2(\Omega),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间. 当 X 是复 $L^2(\Omega)$ 空间时，此时定义如下的内积：

$$\langle f,g\rangle := \int_{\Omega} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t,\quad \forall\, f,g\in L^2(\Omega).$$

容易验证 $(L^2(\Omega),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间.

§4.2 Hilbert 空间

定理 4.6 (Cauchy-Schwarz 不等式) 设 $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间，则对于任意的 x，$y\in X$，恒有

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\,\langle y,y\rangle. \tag{4.2.1}$$

证明 当 $y=0$ 时 (4.2.1) 式显然成立. 当 $y\neq 0$ 时，由内积公理，对于任意的 $\alpha\in\mathbf{F}$ 都有

$$0\le \langle x-\alpha y,x-\alpha y\rangle = \langle x,x\rangle-\alpha\,\langle y,x\rangle-\overline{\alpha}\,\langle x,y\rangle+|\alpha|^2\,\langle y,y\rangle.$$

在上式中令 $\alpha=\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$，就会有

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle x,x\rangle-\frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}-\frac{\langle y,x\rangle\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}+\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{|\langle y,y\rangle|^2}\,\langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle-\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}. \end{aligned}$$

故 (4.2.1) 式成立.

定理 4.7 设 X 是内积空间, 对于任意的 $x \in X$, 定义 $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$, 则 $\|\cdot\|$ 是 X 上的一个范数, 等价地说, 对于任意的 x、$y \in X$、$\alpha \in \mathbf{F}$, 有

(1) 正定性: $\|x\| \geq 0$; 而且 $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(2) 绝对齐次性: $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$;

(3) 三角形不等式: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

此定理说明内积空间是赋范线性空间, 但赋范线性空间是距离空间, 因此, 我们在赋范线性空间和距离空间中考察的定义、概念和得到的结论也都适用于内积空间中. 类似于 Banach 空间, 引入下述定义.

定义 4.8 完备的内积空间称为 **Hilbert 空间**. 等价地说, 一个 Banach 空间 X 称为 Hilbert 空间, 如果在 X 上存在一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 使得 X 上的范数正好是由关系式 $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ 定义的范数.

例 4.9 $\mathbf{R}^n$ (或 $\mathbf{C}^n$) 是 Hilbert 空间.

证明 设 $x_k = (\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})$, $k = 1, 2, \cdots$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Cauchy 点列, 即对于任意的 $\varepsilon > 0$, 始终存在自然数 n_0, 当 k, $l \geq n_0$ 时, 就会有

$$\varepsilon > \|x_k - x_l\| = [(\xi_1^{(k)} - \xi_1^{(l)})^2 + \cdots + (\xi_n^{(k)} - \xi_n^{(l)})^2]^{1/2}, \qquad (4.2.2)$$

则有

$$|\xi_i^{(k)} - \xi_i^{(l)}| \leq \|x_k - x_l\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

是 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 点列, 从而由实数的完备性知, 存在 $\xi_i \in \mathbf{R}$, 使得

$$\lim_{k\to+\infty} \xi_i^{(k)} = \xi_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因此 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$. 在 (4.2.2) 中令 $l \to +\infty$, 则当 $k \geq n_0$ 时, 有

$$[(\xi_1^{(k)} - \xi_1)^2 + \cdots + (\xi_n^{(k)} - \xi_n)^2]^{1/2} \leq \varepsilon,$$

即 $\|x_k - x\| \leq \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k - x\| = 0$, 也就是说, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$. 因此, $\mathbf{R}^n$ 是 Hilbert 空间. 同理可证 $\mathbf{C}^n$ 是 Hilbert 空间.

例 4.10 l^2 是 Hilbert 空间.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 l^2 中的 Cauchy 列, $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots)$, 因而对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 n_0, 当 n、$m > n_0$ 时, 就有

$$\|x_n - x_m\| = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left|\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}\right|^2\right)^{1/2} < \varepsilon,$$

因此，对于任意的 $k\in\mathbf{N}$，$|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|<\varepsilon$. 这就说明了 $\{\xi_k^{(n)}:\ n\in\mathbf{N}\}$ 是 Cauchy 点列. 根据实数和复数的完备性知，存在 $\xi_k\in\mathbf{R}$（或者 $\xi_k\in\mathbf{C}$），使得 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k$, $k=1, 2, \cdots$. 令 $x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}$. 对于任意的 $s\in\mathbf{N}$，当 $n, m>n_0$ 时，有

$$\sum_{k=1}^{s}|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|^2\le\sum_{k=1}^{+\infty}|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|^2\le\varepsilon^2.$$

令 $m\to+\infty$. 当 $n\ge n_0$ 时，有

$$\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{s}|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}|^2=\sum_{k=1}^{s}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|^2\le\varepsilon^2.$$

但上式对任何自然数 s 都是成立的，因此当 $n\ge n_0$ 时，

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|^2\le\varepsilon^2.$$

因此，$x_n-x\in l^2$. 故 $x=(x-x_n)+x_n\in l^2$，而且当 $n>n_0$ 时，$\|x_n-x\|\le\varepsilon$. 也就是说 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n-x\|=0$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，这就说明 l^2 中任何 Cauchy 点列都收敛，故 l^2 是 Hilbert 空间.

例 4.11 (1) $L^2([a,b])$ 是 Hilbert 空间. $L^2([a,b])$ 上的内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

如果令

$$A=\{f:\ f\ 在\ [a,b]\ 上绝对连续, f, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\in L^2([a,b]), f(a)=f(b)=0\}.$$

则 A 是 $L^2([a,b])$ 的稠密子空间. 在 A 上可以定义如下的内积:

$$\langle f,g\rangle_A=\langle f,g\rangle+\left\langle\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right\rangle.$$

$(A,\langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ 是一个 Hilbert 空间. 但 A 在 $L^2([a,b])$ 的内积下不是完备的.

(2) 设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 的开子集，$C_0^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上具有紧支集的无限可微复值函数空间. 定义

$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega\left(f\overline{g}+\frac{\partial f}{\partial x}\overline{\frac{\partial g}{\partial x}}+\frac{\partial f}{\partial y}\overline{\frac{\partial g}{\partial y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\overline{\frac{\partial g}{\partial z}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

则 $(C_0^\infty(\Omega), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间. 此内积诱导的范数为

$$\|f\| = \left(\int_\Omega (|f|^2 + |\nabla f|^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)^{\frac{1}{2}}$$

在此范数下 $C_0^\infty(\Omega)$ 不是完备的, 它的完备化空间 $H_0^1(\Omega)$ 称为 **Sobolev 空间**.

设 X 和 Y 均是数域 $\mathbf{F}$ 上的内积空间, 线性算子 $T: X \longrightarrow Y$ 称为**内积同构算子**. 如果它是一一对应的, 而且对于任意的 $x, y \in X$, 有 $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$. 如果 X 和 Y 之间存在内积同构算子, 则称 X 和 Y **内积同构**.

定理 4.12 (完备化定理) 设 X 是任意的内积空间, 则一定存在 Hilbert 空间 $\overline{X}$, 以及内积同构算子 $T: X \longrightarrow X_0 \subseteq \overline{X}$, 其中 X_0 是 $\overline{X}$ 的稠密子空间. 特别地, 在内积同构意义下 $\overline{X}$ 是唯一的.

定理 4.13 内积空间中线性子空间的闭包也是线性子空间

证明 设 W 是内积空间 X 的子空间, $x, y \in \overline{W}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{F}$, 则存在 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset W$, 使得 $x_n \to x$, $y_n \to y\,(n \to +\infty)$. 因为 $\alpha x_n + \beta y_n \in W$, 由加法和数乘的连续性知, $\alpha x_n + \beta y_n \longrightarrow \alpha x + \beta y\,(n \to +\infty)$. 因此, $\alpha x + \beta y \in \overline{W}$, 故 $\overline{W}$ 也是线性子空间.

定理 4.14 Hilbert 空间 X 中的闭集 A 是完备的, 即 A 中的任何 Cauchy 点列收敛于 A 的点. Hilbert 空间中的闭子空间是 Hilbert 空间.

证明 设 $\{x_n\} \subset A$ 是任一 Cauchy 点列, 则 $\{x_n\}$ 也是 X 的 Cauchy 点列, 因此存在 $x \in X$ 使得 $x_n \longrightarrow x$, 故 $x \in \overline{A} = A$.

定理 4.15 设 X 是 Hilbert 空间, Y 是 X 的子空间. 则

(1) Y 是 Hilbert 空间, 当且仅当 Y 在 X 中是闭的;

(2) 若 Y 是有限维子空间, 则 Y 一定是 Hilbert 空间;

(3) 若 X 可分, 则 Y 一定是可分的.

§4.3 内积与范数的关系

定理 4.16 (极化恒等式) 在内积空间中, 内积与范数有如下关系:

(1) 设 X 为实内积空间, 则有

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right);$$

(2) 如果 X 为复内积空间, 则有

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right).$$

证明 (1) 当 X 为实内积空间时，有

$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\\=&\langle x+y,x+y\rangle-\langle x-y,x-y\rangle\\=&\langle x,x\rangle+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle-\langle x,x\rangle+\langle y,x\rangle+\langle x,y\rangle-\langle y,y\rangle\\=&2\langle x,y\rangle+2\langle y,x\rangle=4\langle x,y\rangle.\end{aligned}$$

因此，

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2).$$

(2) 当 X 为复内积空间时，由前面 (1) 的证明有

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2=2\langle x,y\rangle+2\langle y,x\rangle, \tag{4.3.1}$$

将 y 换成 $\mathrm{i}y$，等式两边再乘以 i，得到

$$\mathrm{i}(\|x+\mathrm{i}y\|^2-\|x-\mathrm{i}y\|^2)=\mathrm{i}(2\langle x,\mathrm{i}y\rangle+2\langle \mathrm{i}y,x\rangle)=2\langle x,y\rangle-2\langle y,x\rangle, \tag{4.3.2}$$

由 (4.3.1) + (4.3.2) 得到

$$4\langle x,y\rangle=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2.$$

定理 4.17 (平行四边形法则) 内积空间中范数满足平行四边形公式：

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2),\quad \forall x,y\in X.$$

注 若赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中，范数不满足平行四边形法则，则在 X 中利用该范数无法定义内积，也就是说，X 上不可能定义一个内积，使得由它产生的范数正好是 X 中原来的范数. 但可以证明，若 $(X,\|\cdot\|)$ 中的范数满足平行四边形公式，则可以在 X 中定义一个内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 满足

$$\|x\|=\langle x,x\rangle^{1/2},\quad \forall x\in X.$$

例 4.18 $(C([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$ 不是内积空间.

证明 无妨取 $f(x)=1$，$g(x)=(x-a)/(b-a)\in C([a,b])$，则容易看出 $\|f\|=\|g\|=1$，但是

$$f(x)+g(x)=1+\frac{x-a}{b-a},\quad f(x)-g(x)=1-\frac{x-a}{b-a},$$

因此，$\|f+g\|=2$，$\|f-g\|=1$，故 $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=5$. 但是，$2(\|f\|^2+\|g\|^2)=4$. 这就是说平行四边形法则不成立. 故 $C([a,b])$ 对于范数 $\|\cdot\|_\infty$ 来说不能定义内积.

例 4.19 当 $p\geq 1$ 且 $p\neq 2$ 时，$l^p=(l^p,\|\cdot\|_p)$ 不是内积空间.

证明 无妨取 $x=(1,1,0,\cdots)$，$y=(1,-1,0,\cdots)\in l^p$，则 $\|x\|=\|y\|=2^{1/p}$，$\|x+y\|=\|x-y\|=2$，因此，

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=8\neq 4\times 2^{2/p}=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

这就是说平行四边形法则不成立. 故当 $p\neq 2$ 时，l^p 对范数 $\|\cdot\|_p$ 来说不能定义内积.

例 4.20 当 $p\geq 1$ 但 $p\neq 2$ 时，$L^p([a,b])=(L^p([a,b]),\|\cdot\|_p)$ 不是内积空间.

证明 无妨取

$$f(x)\equiv 1,\quad g(x)=\begin{cases}-1, & \text{当 } x\in[a,c],\\ 1, & \text{当 } x\in(c,b],\end{cases}$$

其中 $c=(a+b)/2$，则有

$$\|f\|=\|g\|=(b-a)^{1/p},\quad \|f\pm g\|=2^{(1-1/p)}(b-a)^{1/p},$$

从而，

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2^{(3-2/p)}(b-a)^{2/p}\neq 4(b-a)^{2/p}=2(\|f\|^2+\|g\|^2).$$

这就是说平行四边形法则不成立. 故当 $p\geq 2$ 且 $p\neq 2$ 时，$L^p([a,b])$ 对范数 $\|\cdot\|_p$ 来说不能定义内积.

§4.4 正交与正交补

类似于向量空间，利用内积可以在内积空间中定义角度、正交性等.

定义 4.21 设 X 是内积空间.

(1) 对于 x，$y\in X$ 来说，如果 $\langle x,y\rangle=0$，则称 x，y 是**正交的**，记作 $x\perp y$;

(2) 设 $x\in X$，$M\subset X$，如果向量 x 与 M 中的任何向量正交，则称 x 与 M **正交**，记作 $x\perp M$;

(3) 设 M、$N\subset X$. 如果对任何 $x\in M$、$y\in N$ 恒有 $x\perp y$, 则称 M 与 N **正交**. 记作 $M\perp N$;

(4) 若 $M\subset X$, 则 X 中与 M 正交的向量全体, 称为 M 的**正交补**. 记作 $M^{\perp}$, 即就是说 $M^{\perp}=\{x:\ x\in X,\ x\perp M\}$.

定理 4.22 (勾股定理) 设 X 是内积空间.

(1) 若 x, $y\in X, x\perp y$, 则

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2;$$

(2) 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in X$, 而且 $x_i\perp x_j$ (当 $i\neq j$), 则有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2.$$

证明 (1) 因为 $\langle x,y\rangle=0$, 因此,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\\ &= \langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2.\end{aligned}$$

(2) 的证明类似.

定理 4.23 设 X 是内积空间, 则内积 $\langle x,y\rangle$ 是 x、y 的连续函数, 等价地说, 若 $x_n\longrightarrow x_0$ 和 $y_n\longrightarrow y_0$, 那么 $\langle x_n,y_n\rangle\longrightarrow\langle x_0,y_0\rangle\,(n\to+\infty)$.

证明 设 x_0, y_0 为内积空间 X 中的点. 又设 $\{x_n\},\{y_n\}\subset X$, 而且 $x_n\longrightarrow x_0$, $y_n\longrightarrow y_0\,(n\to+\infty)$, 从而可知 $\|x_n\|\longrightarrow\|x_0\|\,(n\to+\infty)$, 因此, 存在 $M>0$, 使得对于任何的自然数 n 有, $\|x_n\|\leq M$, 由此可知, 当 $n\longrightarrow+\infty$ 时, 就有

$$\begin{aligned}&|\langle x_n,y_n\rangle-\langle x_0,y_0\rangle|\\ =\ &|\langle x_n,y_n-y_0\rangle+\langle x_n-x_0,y_0\rangle|<|\langle x_n,y_n-y_0\rangle|+|\langle x_n-x_0,y_0\rangle|\\ \leq\ &\|x_n\|\,\|y_n-y_0\|+\|y_0\|\,\|x_n-x_0\|\to 0\,(n\to+\infty).\end{aligned}$$

定理 4.24 设 X 是内积空间, 则有

(1) 对任意的 $M\subset X$, $M^{\perp}$ 为 X 的闭线性子空间;

(2) 若 $\overline{M}=X$, 则 $M^{\perp}=\{0\}$;

(3) 对任意非空的线性子空间 $M\subset X$, 恒有 $M\cap M^{\perp}=\{0\}$.

证明 (1) 首先证明 $M^{\perp}$ 是 X 的线性子空间, 即证对于任意的 x, $y \in M^{\perp}$ 和 α, $\beta \in \mathbf{F}$, 有 $\alpha x + \beta y \in M^{\perp}$. 因为对于任意的 $z \in M$ 有, $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle = 0$, 故

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle = 0.$$

因此, $(\alpha x + \beta y) \perp z$. 依 $z \in M$ 的任意性知 $(\alpha x + \beta y) \perp M$. 如果 $\{x_n\} \subset M^{\perp}, x_n \longrightarrow x\,(n \to +\infty)$, 则对于任意的 $z \in M$, 有 $\langle x_n, z\rangle = 0$. 依内积的连续性得到

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, z\rangle = \langle x, z\rangle.$$

再由 $z \in M$ 的任意性知 $x \in M^{\perp}$. 这就说明 $M^{\perp}$ 是 X 的闭线性子空间.

(2) 设 $x \in M^{\perp}$. 因为 $x \in X = \overline{M}$, 从而存在 $\{x_n\} \subset M$, 使得 $x_n \longrightarrow x\,(n \to +\infty)$. 由内积的连续性及 $x \in M^{\perp}$ 知: $\langle x, x\rangle = \langle \lim\limits_{n\to+\infty} x_n, x\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$. 由此得到 $x = 0$, 故 $M^{\perp} \subset \{0\}$. 又因为 $0 \in M^{\perp}$, 故 $\{0\} \subset M^{\perp}$, 所以 $M^{\perp} = \{0\}$.

(3) 设 $x \in M \cap M^{\perp}$, 则 $x \in M$ 而且 $x \in M^{\perp}$, 由此可见 $\langle x, x\rangle = 0$, 故 $x = 0$, 从而 $M \cap M^{\perp} \subset \{0\}$. 又因 M 是线性子空间并且由 (1) 知 $0 \in M \cap M^{\perp}$, 故 $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

§4.5 变分原理与正交分解定理

设 X 是一个内积空间, $M \subseteq X$ 是非空子集, $x \in X$ 到 M 的距离为

$$\delta = d(x, M) = \inf_{y\in M} \|x - y\|,$$

那么, 是否存在 $\hat{y} \in M$, 使得 $\delta = \|x - \hat{y}\|$? 如果存在, 这个 $\hat{y}$ 是否唯一? 这是一类存在性与唯一性问题, 具有重要的理论和实用价值. 例如, 在优化问题中, 往往需要在某个给定的函数集合中唯一确定一个函数, 使之与已知函数最优逼近.

设 M 是内积空间 X 的子空间, 对于 $x \in X$, 若存在 $y \in M$, 使得

$$\|x - y\| = d(x, M) = \inf_{z\in M} \|x - z\|,$$

则称 y 是 x 在 M 中的**投影**(或称 y 是 x 在 M 上的**最佳逼近元**), 记作 $y = P_M x$. 此定义等价于以下的叙述: 设 M 是内积空间 X 的子空间, 对于

$x \in X$. 若存在 $y \in M$, $z \in M^{\perp}$, 使得 $x = y + z$, 则称其为 x 的 **正交分解**, 称 y 为 x 在 M 上的 **投影**.

定理 4.25 (变分原理) 设 H 是 Hilbert 空间, M 是 H 中的一个非空闭凸集. 则对于任意的 $x \in H$, M 中存在唯一的点 x_0 使得

$$\|x - x_0\| = \inf\{\|x - z\| : \quad z \in M\}.$$

证明 由于 $\|x - z\| \geq 0$, 所以非负数集 $\{\|x - z\| : \quad z \in M\}$ 的下确界是存在的. 先假设 $x = 0$, 就是要证明存在唯一向量 $x_0 \in M$, 使得 $\|x_0\| = \inf\{\|z\| : \quad z \in M\}$, 即要找到 M 中具有最小范数的元素 x_0. 记 $d = \inf\{\|z\| : \quad z \in M\}$. 由下确界的定义知, 存在序列 $\{x_n\} \subset M$, 使得 $\|x_n\| \longrightarrow d\,(n \to +\infty)$. 利用平行四边形公式推出

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2\right) - \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

因为 M 是凸集, 从而有 $(x_n + x_m)/2 \in M$. 因此, $\|(x_n + x_m)/2\| \geq d$. 但是 $\|x_n\| \longrightarrow d\,(n \to +\infty)$. 所以, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 始终存在自然数 n_0, 使得当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\|x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{4}\varepsilon^2.$$

因此, 当 n, $m \geq n_0$ 时, 有

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 < \frac{1}{2}\left(2d^2 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) - d^2 = \frac{1}{4}\varepsilon^2.$$

即就有 $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. 因而 $\{x_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 点列. 但因 H 是 Hilbert 空间, 所以存在 $x_0 \in H$ 使得 $x_n \longrightarrow x_0\,(n \to +\infty)$. 又因 M 是闭集, 从而 $x_0 \in M$. 而且 $\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$. 这样一来就有

$$d \leq \|x_0\| = \|x_0 - x_n + x_n\| \leq \|x_0 - x_n\| + \|x_n\| \longrightarrow d\,(n \to +\infty),$$

故 $\|x_0\| = d$.

下面证明 x_0 的唯一性. 设 $x_1 \in M$ 也使得 $\|x_1\| = d$. 由 M 的凸性知, $(x_0 + x_1)/2 \in M$. 因此

$$d \leq \left\|\frac{1}{2}(x_0 + x_1)\right\| = \frac{1}{2}\|x_0 + x_1\| \leq \frac{1}{2}\left(\|x_0\| + \|x_1\|\right) = d.$$

所以 $\|(x_0+x_1)/2\|=d$. 由平行四边形法则,

$$d^2=\left\|\frac{x_0+x_1}{2}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\|x_0\|^2+\|x_1\|^2\right)-\left\|\frac{x_0-x_1}{2}\right\|^2=d^2-\left\|\frac{x_0-x_1}{2}\right\|^2,$$

故 $\|\frac{x_0-x_1}{2}\|^2=0$, 立即得 $x_0=x_1$.

最后考察 $x\neq 0$ 的一般情形. 令 $M-x=\{z-x:\ z\in M\}$, 则 $M-x$ 也是闭凸集. 由已证结论知存在唯一的 $u_1\in M-x$, 使得

$$\|u_1\|=\inf\{\|z-x\|:\ z\in M\}.$$

因此存在唯一的 $x_0\in M$, 使得 $u_1=x_0-x$. 这样就完成了证明.

注　此定理说明了最佳逼近元的存在性及唯一性.

定理 4.26　设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间, $x\in H$. 若 x_0 是 M 中满足于 $\|x-x_0\|=d(x,M)$ 的唯一元素, 则有 $(x-x_0)\perp M$. 反之, 如果 $x_0\in M$, 使得 $(x-x_0)\perp M$, 则 $\|x-x_0\|=d(x,M)$.

证明　记 $d=d(x,M)$. 分两步来证明.

(1) 要证明 $(x-x_0)\perp M$, 即对于任意的 $z\in M$, 都有 $\langle x-x_0,z\rangle=0$. 当 $z=0$ 时显然成立. 若 $z\neq 0$, 则对任意的 λ, 因为 $x_0+\lambda z\in M$, 因而有

$$\begin{aligned}
d^2 &\le \|x-(x_0+\lambda z)\|^2\\
&= \langle (x-x_0)-\lambda z,(x-x_0)-\lambda z\rangle\\
&= \|x-x_0\|^2+|\lambda|^2\|z\|^2-\langle x-x_0,\lambda z\rangle-\overline{\langle x-x_0,\lambda z\rangle}\\
&= \|x-x_0\|^2+|\lambda|^2\|z\|^2-2\ \mathrm{Re}(\langle x-x_0,\lambda z\rangle)\\
&= \|x-x_0\|^2+|\lambda|^2\|z\|^2-2\ \mathrm{Re}(\overline{\lambda}\langle x-x_0,z\rangle).
\end{aligned}$$

令 $\lambda=\langle x-x_0,z\rangle/\|z\|^2$, 得到

$$d^2\le\|x-x_0\|^2-\frac{|\langle x-x_0,z\rangle|^2}{\|z\|^2}=d^2-\frac{|\langle x-x_0,z\rangle|^2}{\|z\|^2}.$$

故 $\langle x-x_0,z\rangle=0$.

(2) 若 $x_0\in M$, 使得 $(x-x_0)\perp M$, 显然 $\|x-x_0\|\ge d$. 下面再证 $\|x-x_0\|\le d$. 事实上, 对任何 $z\in M$, 因为 $x-z=(x-x_0)+(x_0-z)$, 而且 $x-x_0\in M^\perp$, $x_0-z\in M$, 由勾股定理得

$$\|x-z\|^2=\|x-x_0\|^2+\|x_0-z\|^2\ge\|x-x_0\|^2.$$

故有 $\|x-z\| > \|x-x_0\|$，对此式中的 z 在 M 中取下确界得知，$d \geq \|x-x_0\|$.

注　此定理说明了投影与最佳逼近元的等价性及唯一性.

定理 4.27 (正交分解定理)　设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间，则对于 H 中任意一个元素 x，恒有唯一的 $x_0 \in M$，使得

(1) $\|x-x_0\| = d(x, M)$，即 x_0 是 x 在 M 上的最佳逼近元；

(2) x_0 是 x 在 M 上的投影；

(3) x 按 M 有唯一的分解：$x = x_0 + (x-x_0)$，其中 $x_0 \in M$，$x-x_0 \in M^{\perp}$；

(4) $H = M \bigoplus M^{\perp}$.

定理 4.28　设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间，对于任一 $x \in H$，令 Px 表示 M 中满足 $(x-Px) \perp M$ 的唯一元素，则

(1) P 是 H 上的线性算子；

(2) 对于任意的 $x \in H$，$\|Px\| \leq \|x\|$；

(3) $P^2 = P$，这里 P^2 表示 P 与其自身的复合；

(4) $\ker P = M^{\perp}$，　$R(P) = M$.

证明　(1) 由定理 4.27 知 $x - Px \in M^{\perp}$，而且 $\|x-Px\| = d(x, M)$，设 $x_1, x_2 \in H, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. 如果 $y \in M$，则

$$
\begin{aligned}
& \langle(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 P x_1 + \alpha_2 P x_2), y\rangle \\
= \ & \alpha_1 \langle x_1 - P x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle x_2 - P x_2, y\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

由正交投影的唯一性得知，$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P x_1 + \alpha_2 P x_2$，所以 P 是线性算子.

(2) 和 (3) 的证明.　如果 $x \in H$，则 $x = (x-Px) + Px, Px \in M$，但 $(x-Px) \perp M$，因而由勾股定理知，$\|x\|^2 = \|x-Px\|^2 + \|Px\|^2 \geq \|Px\|^2$. 如果 $y \in M$，则 $Py = y$. 对 H 中任意一个 x，都有 $Px \in M$，故 $P^2 x = P(Px) = Px$，即有 $P^2 = P$.

(4)　如果 $Px = 0$，则 $x = x - Px \in M^{\perp}$，因此 $\ker P \subseteq M^{\perp}$. 反之，如果 $x \in M^{\perp}$，则

$$
0 = \langle x - Px, Px\rangle = \langle x, Px\rangle - \langle Px, Px\rangle = -\langle Px, Px\rangle = -\|Px\|^2.
$$

所以 $Px = 0$，因而 $M^{\perp} \subset \ker P$. 由此得到 $\ker P = M^{\perp}$. 显然有 $R(P) = M$.

注　此定理中的 P 称为 M 上的 **正交投影算子**，简称为 **投影算子**.

定义 4.29　设 H 是 Hilbert 空间, $W \subset H$. 若 M 是包含 W 的最小闭子空间, 则称 M 是由 W **张成的闭子空间** (**或闭线性包**), 记作 $M = \overline{\text{span}(W)}$.

定理 4.30

(1) 设 M 是 Hilbert 空间 H 的任意子集, 则 $(M^\perp)^\perp$ 是 M 张成的闭子空间.

(2) 设 M 是 Hilbert 空间 H 中的闭线性子空间, 则 $(M^\perp)^\perp = M$.

(3) 设 M 是 Hilbert 空间 H 中的线性子空间, 则 M 在 H 中稠密, 当且仅当 $M^\perp = \{0\}$.

证明　(1) 设 W 是包含 M 的任意闭子空间, 对于任意的 $z \in (M^\perp)^\perp$, 由正交分解定理, $z = z_1 + z_2$, $z_1 \in W, z_2 \in W^\perp$. 因为 $M \subset W$, 则对任意的 $x \in W^\perp$, 有 $\langle y, x\rangle = 0$, $\forall\ y \in M$. 因此, $W^\perp \subset M^\perp$, 所以

$$\langle z_2, x\rangle = \langle z_1, x\rangle + \langle z_2, x\rangle = \langle z_1 + z_2, x\rangle = \langle z, x\rangle = 0, \quad \forall\ x \in W^\perp.$$

特别地, 取 $x = z_2$, 则 $\langle z_2, z_2\rangle = 0$. 因此, $z = z_1 \in W$, 这样一来就有, $(M^\perp)^\perp \subset W$. 由 W 的任意性知 $(M^\perp)^\perp$ 是 M 张成的闭子空间.

(2) 由 (1) 直接得到.

(3) 必要性的证明. 由定理 4.24(2) 得到.

充分性的证明.　设 $M^\perp = \{0\}$, 则 $(\overline{M})^\perp = M^\perp = \{0\}$. 由正交分解定理得 $H = \overline{M}$, 这就是说 M 在 H 中稠密.

§4.6　标准正交系

定义 4.31　设 $M = \{e_\alpha:\ \alpha \in \Lambda\}$ 是内积空间 X 的一些非零元素构成的子集. 若 M 中任何两个不同元素都正交, 则称 M 为 X 中的一个 **正交系**. 进一步, 若在正交系 M 中每个元素的范数均为 1, 则称 M 为 X 的一个 **标准正交系**.

例 4.32　在 $\mathbf{R}^n$ 中,

$$\{e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),\ \ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots,\ \ e_n = (0, 0, 0, \cdots, 0, 1)\}$$

是一个标准正交系.

例 4.33　在实 $L^2([-\pi, \pi])$ 中, 内积为

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x, \quad \forall f, g \in L^2([-\pi, \pi]),$$

则

$$\{\cos x,\ \cos(2x),\ \cos(3x),\ \cdots\};$$
$$\{\sin x,\ \sin(2x),\ \sin(3x),\ \cdots\};$$
$$\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos(2x),\ \sin(2x),\ \cdots\}$$

都是正交系而

$$\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\right\};$$
$$\left\{\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(3x)}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\right\};$$
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}},\ \cdots\right\}$$

都是标准正交系.

例 4.34 在复 $L^2([-\pi,\pi])$ 中，内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x,\quad \forall f,g\in L^2([-\pi,\pi]),$$

则 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}/\sqrt{2\pi}:\quad n=1,2,3,\cdots\}$ 是标准正交系.

命题 4.35 正交系中的元素都是线性无关的.

证明 不失一般性，设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个正交系. 令

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0,$$

对等式两边同时求与 x_k, $k=1,2,\cdots,n$ 的内积得到

$$0=\langle 0,x_k\rangle=\left\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_jx_j,x_k\right\rangle=\alpha_k\langle x_k,x_k\rangle=\alpha_k\|x_k\|^2.$$

因为 $\langle x_k,x_k\rangle\neq 0$, 所以，对于任意的 $k=1,2,\cdots,n$, 有 $\alpha_k=0$, 这就说明 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 线性无关.

定理 4.36 (Gram-Schmidt 正交化过程) 设 X 是内积空间，$\{x_n:n=1,2,\cdots\}$ 是 X 中的线性无关子集. 则存在标准正交系 $\{e_1,e_2,\cdots\}$, 使得对每一个自然数 n, 有：$\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

证明 因为 $x_1\neq 0$. 令 $e_1=x_1/\|x_1\|$, 则 $\|e_1\|=1$, $\mathrm{span}\{e_1\}=\mathrm{span}\{x_1\}$. 令 $y_2=x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1$, 则 $\langle y_2,e_1\rangle=\langle x_2,e_1\rangle-\langle x_2,e_1\rangle\langle e_1,e_1\rangle$

$= 0$. 因此 $y_2 \perp e_1$. 而且 $y_2 \neq 0$, 否则 x_2 与 e_1 线性相关, 从而 x_2 也与 x_1 线性相关. 令 $e_2 = y_2/\|y_2\|$, 则 $\{e_1, e_2\}$ 是标准正交系, 而且 $\text{span}\{e_1, e_2\} = \text{span}\{x_1, x_2\}$. 假设已经选择好 e_1, e_2, $\cdots$, e_k 使得它们构成标准正交系, 而且

$$\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k\} = \text{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}, \tag{4.6.1}$$

令

$$y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i,$$

则对于 $j = 1, 2, \cdots, k$, 有

$$\begin{aligned} \langle y_{k+1}, e_j \rangle &= \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x_{k+1}, e_j \rangle - \langle x_{k+1}, e_j \rangle = 0, \end{aligned}$$

即 $y_{k+1} \perp e_j$, $j = 1, 2, \cdots, k$, 而且 $y_{k+1} \neq 0$, 否则 x_{k+1} 可以表示成 e_1, e_2, $\cdots$, e_k 的线性组合, 由归纳法假设 (4.6.1) 知, x_{k+1} 也可以表示成 x_1, x_2, $\cdots$, x_k 的线性组合, 这就与假设 x_1, x_2, $\cdots$, x_k, x_{k+1} 线性无关相矛盾. 令 $e_{k+1} = y_{k+1}/\|y_{k+1}\|$, 显然 $\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}\}$ 是标准正交系, 而且 e_{k+1} 是 e_1, e_2, $\cdots$, e_k, x_{k+1} 的线性组合, 从而它是 x_1, $\cdots$, x_k, x_{k+1} 的线性组合, 所以

$$\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}\} \subseteq \text{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}\}.$$

另一方面,

$$x_{k+1} = y_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i = \|y_{k+1}\| e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i,$$

x_{k+1} 是 e_1, e_2, $\cdots$, e_k, e_{k+1} 的线性组合, 所以

$$\text{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\} \subseteq \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}\},$$

故, $\text{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\} = \text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k+1}\}$. 因此, 对于任意的自然数 n, $\text{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\} = \text{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 而且 $\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ 为标准正交系.

注 正交化过程为

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{x_1}{\|x_1\|}, \\ e_2 &= \frac{x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1}{\|x_2-\langle x_2,e_1\rangle e_1\|}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_{j+1} &= \frac{x_{j+1}-\sum\limits_{k=1}^{j}\langle x_{j+1},e_k\rangle e_k}{\left\|x_{j+1}-\sum\limits_{k=1}^{j}\langle x_{j+1},e_k\rangle e_k\right\|}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

定理 4.37 内积空间 X 中的有限维子空间 M 是闭子空间.

证明 在 M 中任取一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$, 按 Gram-Schmidt 正交化过程, 作出 M 的标准正交基 e_1, e_2, $\cdots$, e_m, 对于任意的 $x\subset M$,

$$x=\sum_{k=1}^{m}\xi_k e_k,\quad \langle x,e_k\rangle=\left\langle\sum_{k=1}^{m}\xi_k e_k,e_k\right\rangle=\xi_k.$$

设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{m}\xi_k^{(n)}e_k\in M$, $x_n\longrightarrow y\in X\,(n\to+\infty)$, 则由内积的连续性知, $\langle x_n,e_k\rangle\longrightarrow\langle y,e_k\rangle=\eta_k(n\to+\infty)$, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$. 因而 $\xi_k^{(n)}=\langle x_n,e_k\rangle\longrightarrow\eta_k\,(n\to+\infty)$. 由加法和数乘的连续性, 有

$$x_n=\sum_{k=1}^{m}\xi_k^{(n)}e_k\longrightarrow\sum_{k=1}^{m}\eta_k e_k\,(n\to+\infty),$$

由序列极限的唯一性得 $y=\sum\limits_{k=1}^{m}\eta_k e_k\in M$, 故 M 是闭子空间.

定理 4.38 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的一个标准正交系, 令 $M=\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$. 如果 P 是 H 到 M 上的正交投影算子, 则对于任意的 $x\in H$, 有

$$Px=\sum_{k=1}^{m}\langle x,e_k\rangle e_k.$$

证明 对于任意的 $x\in H$, 令

$$Qx=\sum_{k=1}^{m}\langle x,e_k\rangle e_k,$$

如果 $1 \le j \le m$, 则当 $k \neq j$ 时, 有 $\langle e_k, e_j\rangle = 0$, 从而

$$\langle Qx, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{m}\langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle, \quad \langle x - Qx, e_j\rangle = 0,$$

因此, 对于任意的 $x \in H$. $(x - Qx) \perp M$, 很明显 Qx 是 M 中的元素, 但是满足 $(x - x_0) \perp M$ 的向量 x_0 是唯一的, 故对任何 $x \in H$, $Qx = Px$.

定理 4.39 设 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交系, $\{\alpha_k\}$ 是实 (或复) 数点列, 那么级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\alpha_k e_k$ 在 H 中收敛, 当且仅当 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|\alpha_k|^2 < +\infty$ 进而还有

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}|\alpha_k|^2.$$

证明 设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k e_k$. 我们将证明 $\{S_n\}$ 是一个基本点列, 当且仅当 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|\alpha_k|^2 < +\infty$. 根据勾股定理知

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p}|\alpha_k|^2, \quad \forall n, p \in \mathbf{N}.$$

上面的等式表明 $\{S_n\}$ 是基本点列, 当且仅当 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|\alpha_k|^2$ 收敛.

进一步, 我们有

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k e_k\right\|^2 = \lim_{n\to+\infty}\|S_n\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty}|\alpha_k|^2.$$

定理 4.40 (Bessel 不等式) 设 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系, 则对于任意的 $x \in H$ 和 $n \in \mathbf{N}$, 有

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2,$$

和

$$\sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2. \tag{4.6.2}$$

进一步,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2, \tag{4.6.3}$$

而且 $\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$ 在 H 中收敛.

证明 令

$$x_n = x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k,$$

则 $x_n \perp e_k$, $1 \le k \le n$. 由勾股定理得到

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|x_n\|^2 + \left\|\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2 = \|x_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n}\|\langle x, e_k\rangle e_k\|^2 \\ &= \|x_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2\|e_k\|^2 \\ &= \|x_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2.\end{aligned}$$

所以, $\sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2$. 因此根据定理 4.39 可知此定理成立.

推论 4.41 设 $\{e_k: k \in \mathbf{N}\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系, $x \in H$. 则有 $\lim_{n\to+\infty}\langle x, e_n\rangle = 0$.

推论 4.42 设 $\{e_k: k \in \mathbf{N}\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的标准正交系, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是任意的数. 则

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\|^2 \ge \left\|x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2.$$

证明 注意到对任意的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 恒有

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\|^2 = \left\|x - \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle - \alpha_k|^2.$$

因此得到所要证明的结论

注 此定理可以看作是最佳逼近定理.

§4.7 Hilbert 空间中的 Fourier 分析

定义 4.43 设 $S=\{e_k:\ k\in\mathbf{N}\}$ 是内积空间 X 的标准正交系. 对任何 $x\in X$, 数列 $\{\langle x,e_k\rangle:\ k\in\mathbf{N}\}$ 称为 x 关于标准正交系 S 的 **Fourier 系数集**, 称数 $\langle x,e_k\rangle$ 为 x 关于 e_k 的 **Fourier 系数**. 称 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\langle x,e_k\rangle e_k$ 为 x 关于标准正交系 $\{e_k\}$ 的 **Fourier 级数**. 当 Bessel 不等式成为等式时, 等式

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{+\infty}|\langle x,e_k\rangle|^2$$

称为 **Parseval 等式**.

在 $L^2([-\pi,\pi])$ 中, $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt),\quad n=1,2,\cdots\right\}$ 是一个标准正交系, 而且

$$\left\langle f(t),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\,t)\right\rangle=\sqrt{\pi}\,a_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

$$\left\langle f(t),\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\,t)\right\rangle=\sqrt{\pi}\,b_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

其中 a_n 和 b_n 就是通常的 Fourier 系数, 即

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(n\,t)\,\mathrm{d}\,t,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(n\,t)\,\mathrm{d}\,t,\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

$f(t)$ 通常的 Fourier 级数为

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\,t)+b_n\sin(n\,t)).$$

值得注意的是, 这时级数收敛是指按 $L^2([-\pi,\pi])$ 中的范数收敛. 一般来说, 对于 $f(t)\in L^2([-\pi,\pi])$, 必可以展开成几乎处处收敛的三角级数, 即就是有

$$f(t)\overset{\text{a.e.}}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)).$$

从以上可以看出 $\langle x, e_n\rangle$ 与通常 Fourier 系数类似.

定理 4.44 设 H 是 Hilbert 空间，而且 $S=\{e_k:\ k\in\mathbf{N}\}$ 是 H 的标准正交系，则对于任意的 $x\in H$, Fourier 级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$ 在 H 中收敛，即 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k\in H$, 而且

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{+\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2.$$

证明 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k$. 不妨设 $n, m(n>m)$ 是两个自然数，从而

$$\|S_n-S_m\|^2=\left\|\sum_{k=m+1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2=\sum_{k=m+1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2.$$

由 Bessel 不等式，正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2$ 是收敛的，故当 $n, m\to+\infty$ 时，$\sum\limits_{k=m+1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2\longrightarrow 0$. 所以 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 点列. 又因 H 是 Hilbert 空间，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$ 收敛. 又因为

$$\left(x-\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k\right)\perp\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k,$$

所以

$$\|x\|^2=\left\|x-\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2+\left\|\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2.$$

进而就有

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{+\infty}|\langle x, e_k\rangle|^2.$$

注 与通常类似，定理 4.44 中的级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$ 并不一定收敛于 x.

定义 4.45 设 H 是 Hilbert 空间，H 中极大的标准正交集 $M=\{e_\alpha:\ \alpha\in\Lambda\}$ 称为**完全的**，等价地说就是，M 不可能再添加元素使添加后所得的集合仍是标准正交集，也即不存在与所有的 $e_\alpha\in M$ 都正交的非零元素，

即，假如可以选择 $x\in X$，使得对任意的 $e_\alpha\in M$，满足 $\langle x,e_\alpha\rangle=0$，则必有 $x=0$. Hilbert 空间 H 中完全的标准正交集也称为 **标准正交基**.

例 4.46　$\{e_1=(1,0),\ e_2=(0,1)\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的标准正交基.

例 4.47　$\{e_1=(1,0,0,\cdots,0),\ e_2=(0,1,0,\cdots,0),\ \cdots,e_n=(0,0,0,\cdots,0,1)\}$ 是 $\mathbf{F}^n$ 的标准正交基.

例 4.48　三角函数系

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx),\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx),\quad n=1,\ 2,\ \cdots\right\}$$

是 Hilbert 空间 $L^2([-\pi,\pi])$ 中的标准正交基.

证明　如果 $f(x)\in L^2([-\pi,\pi])$，而且 $f(x)$ 与 S 正交，要证明 $f(x)=0\,a.e.$，即就是 $f(x)$ 为 $L^2([-\pi,\pi])$ 中的零元素. 下面分两步进行：

(1)　若 $f(x)$ 为连续函数，而 $f(x)\neq 0$，则存在 $x_0\in(-\pi,\pi)$，使得 $f(x_0)\neq 0$. 不妨设 $f(x_0)>0$. 否则可用 $-f(x)$ 代替 $f(x)$. 由 $f(x)$ 的连续性知，存在区间 $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset(-\pi,\pi)$，使得 $f(x)\geq c>0$，构造如下的三角多项式

$$P(x)=1+\cos(x-x_0)-\cos\delta=1+\cos x_0\cos x+\sin x_0\sin x-\cos\delta.$$

容易知道，当 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 时，$|x-x_0|\leq\delta$，$P(x)\geq 1$，$\forall\ m\in\mathbf{N}$，

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,P^m(x)\,\mathrm{d}\,x\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} c\,\mathrm{d}\,x=2\,c\,\delta.$$

由于 $f(x)$ 的连续性，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有界，从而存在 $M>0$，使得对于任意的 $x\in[-\pi,\pi]$，有 $|f(x)|\leq M$，当 $x\in[x_0-\delta-\varepsilon,x_0-\delta]\cup[x_0+\delta,x_0+\delta+\varepsilon]$ 时，有 $|P(x)|\leq 1$，并且当 $\varepsilon<(c\delta)/(2M)$ 时，则有

$$\left|\int_{x_0-\delta-\varepsilon}^{x_0-\delta} f(x)\,P^m(x)\,\mathrm{d}\,x+\int_{x_0+\delta}^{x_0+\delta+\varepsilon} f(x)\,P^m(x)\,\mathrm{d}\,x\right|\leq 2\,M\,\varepsilon<c\,\delta.$$

同时可取 ε 任意小，使得 $[x_0-\delta-\varepsilon,x_0+\delta+\varepsilon]\subset[-\pi,\pi]$. 当 $x\in[-\pi,x_0-\delta-\varepsilon]$ 时，

$$1+\cos(x-x_0)-\cos\delta\leq 1+\cos(\delta+\varepsilon)-\cos\delta<1.$$

又因为 $1+\cos(x-x_0)-\cos\delta>-\cos\delta$，所以，

$$|1+\cos(x-x_0)-\cos\delta|\leq 1-\beta<1.$$

当 $x \in [x_0+\delta+\varepsilon, \pi]$ 时，也有上述不等式，因此，当 m 充分大时，有

$$|P^m(x)| \le (1-\beta)^m < \frac{c\,\delta}{4\,M\,\pi}.$$

现在

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,P^m(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \\
= & \left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} + \int_{x_0-\delta-\varepsilon}^{x_0-\delta} + \int_{x_0+\delta}^{x_0+\delta+\varepsilon} + \int_{-\pi}^{x_0-\delta-\varepsilon} + \int_{x_0+\delta+\varepsilon}^{\pi} f(x)\,P^m(x)\,\mathrm{d}\,x\right| \\
\ge & \left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,P^m(x)\,\mathrm{d}\,x\right| - \left|\int_{x_0-\delta-\varepsilon}^{x_0-\delta} f(x)\,P^m(x)\,\mathrm{d}\,x\right. \\
& \left. + \int_{x_0+\delta}^{x_0+\delta+\varepsilon} f(x)\,P^m(x)\,\mathrm{d}\,x\right| - \int_{-\pi}^{x_0-\delta-\varepsilon} |f(x)|\,|P^m(x)|\,\mathrm{d}\,x \\
& - \int_{x_0+\delta+\varepsilon}^{\pi} |f(x)|\,|P^m(x)|\,\mathrm{d}\,x \\
\ge & \ 2\,c\,\delta - c\,\delta - M\,(1-\beta)^m 2\,\pi > c\,\delta - \frac{c\,\delta}{2} = \frac{c\,\delta}{2}.
\end{aligned}$$

另一方面，利用三角恒等式知，$P^m(x)$ 仍为三角多项式，即它是 $\cos(nx)$，$\sin(nx)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 的线性组合，也就是说 $P^m(x) \in \operatorname{span} S$. 因为 $f \perp S$，从而得出 $f \perp P^m$，即有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,P^m(x)\,\mathrm{d}\,x = 0,$$

这就得出矛盾，故必有 $f(x) \equiv 0$.

(2) 设 $f(x) \in L^2([-\pi,\pi])$，而且 $f(x)$ 与 S 正交，由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}\,x &\le \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}\,x\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 是勒贝格可积的，即 $f(x) \in L([-\pi,\pi])$，因此可以令

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t, \quad \forall\ x \in [-\pi,\pi].$$

由勒贝格积分的性质 (定理 1.85) 知, $g(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数, 而且

$$g(-\pi)=0,\quad g(\pi)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)1\,\mathrm{d}x=0,$$

这是因为 f 与 $1/\sqrt{2\pi}$ 正交. 又由于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}=\cos(nx)+\mathrm{i}\sin(nx)$, 故由分部积分公式得

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x=g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}|_{-\pi}^{\pi}-\mathrm{i}n\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x\\ &= -\mathrm{i}n\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x,\quad n=\pm1,\ \pm2,\ \cdots,\end{aligned}$$

取

$$g_1(x)=g(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,\mathrm{d}x,$$

则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}g_1(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x=0,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,$$

因为

$$\cos(nx)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2},\quad \sin(nx)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}},$$

故连续函数 $g_1(x)$ 与三角函数系 S 正交. 由 (1) 的证明得, $g_1(x)\equiv 0$, $g(x)$ 是勒贝格可积函数 $f(x)$ 的带变动上限的积分, 由勒贝格积分的性质, $g(x)$ 是几乎处处可导的, 且 $g_1'(x)=g'(x)=f(x)\,a.e.$, 所以 $f(x)=0\,a.e.$.

例 4.49 考虑实空间 $L^2([-1,1])$. 我们知道多项式集合 $P([-1,1])$ 在 $L^2([-1,1])$ 中稠密, 而 $\{t^n:\ n\in\mathbf{N}\}=\{1,t,t^2,t^3,\cdots,t^k,\cdots\}$ 是 $P([-1,1])$ 的一个基, 因此, 它也是 $L^2([-1,1])$ 的一个基, 但 $\{t^n:\ n\in\mathbf{N}\}$ 不是标准正交基. 利用 Gram-Schmidt 正交化过程将其标准正交化. 在 $L^2([-1,1])$ 上的内积为

$$\langle f,g\rangle:=\int_{-1}^{1}f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t,\qquad f,g\in L^2([-1,1]).$$

1 与 t 是正交的, 将它们单位化得到

$$p_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad p_1(t)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,t.$$

多项式

$$t^2-\left(\int_{-1}^{1}t^2p_0(t)\,\mathrm{d}t\cdot p_0(t)+\int_{-1}^{1}t^2p_1(t)\,\mathrm{d}t\cdot p_1(t)\right)$$
$$=t^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t=t^2-\frac{1}{3}.$$

与 p_0 和 p_1 正交，并且具有范数

$$\left\|t^2-\frac{1}{3}\right\|_2^2=\int_{-1}^{1}\left|t^2-\frac{1}{3}\right|^2\mathrm{d}t=\frac{8}{45}.$$

因此，我们得到

$$p_2(t)=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right).$$

按这种程序继续下去将得到标准的 Legendre 多项式, 通常记为 $\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\,\mathrm{P}_n(t)$, 这里 $\mathrm{P}_n(t)$ 是 Legendre 多项式，其通式为

$$\mathrm{P}_n(t)=\frac{1}{2^n\,n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,t^n}(t^2-1)^n,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

Legendre 多项式 P_n 的重要性还在于它是 Legendre 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}((1-t^2)\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t})+n(n+1)u=0,\quad t\in[-1,1],\ n=0,1,2,\cdots$$

的解. 此方程在处理量子力学问题时有重要作用.

例 4.50 考察实 Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{R})$, 其上的内积定义为

$$\langle f,g\rangle:=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t)\,\mathrm{d}\,t,\quad f,g\in L^2(\mathbf{R}).$$

对幂函数列 1、t、t^2、$\cdots$ 乘上双侧衰减函数 $\mathrm{e}^{-t^2/2}$, 使得函数列

$$\mathrm{e}^{-t^2/2},\ t\mathrm{e}^{-t^2/2},\ t^2\mathrm{e}^{-t^2/2},\ \cdots,$$

在 $L^2(\mathbf{R})$ 中是线性无关的. 利用 Gram-Schmidt 正交化过程会产生如下的标准正交系

$$e_k(t)=\frac{(-1)^k\,\mathrm{e}^{t^2/2}}{\sqrt{2^k\,k!\sqrt{\pi}}}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,t^k}(\mathrm{e}^{-t^2}),\qquad k\geq 0.$$

能够证明 $\{e_k(t)\}$ 是 $L^2(\mathbf{R})$ 的标准正交基. 通常将 $e_k(t)$ 记为

$$e_k(t) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2^k\,k!\,\sqrt{\pi}}}\,\mathrm{H}_k(t), \quad k \geq 0,$$

其中 $\mathrm{H}_k(t)$ 表示 Hermite 多项式, 定义为

$$H_k(t) := (-1)^k e^{t^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,t^k}(e^{-t^2}), \qquad k \geq 0.$$

计算可知其前 6 个如下:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_0(t) &= 1, \qquad \mathrm{H}_1(t) = 2t, \qquad \mathrm{H}_2(t) = 4t^2 - 2,\\
\mathrm{H}_3(t) &= 8t^3 - 12t, \qquad \mathrm{H}_4(t) = 16t^4 - 48t^2 + 12,\\
\mathrm{H}_5(t) &= 32t^5 - 160t^3 + 120t.
\end{aligned}$$

可以验证 Hermite 多项式 H_k 是 Hermite 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - 2t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2ku = 0, \qquad \forall t \in \mathbf{R}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

的解.

例 4.51 考虑实 Hilbert 空间 $L^2([0, +\infty))$. 函数列 $e^{-t^2/2}$, $te^{-t^2/2}$, $t^2e^{-t^2/2}, \cdots$ 在 $L^2([0, +\infty))$ 中是线性无关的. 利用 Gram-Schmidt 正交化过程会产生如下的标准正交系:

$$e_k(t) = e^{-t/2}\mathrm{L}_k(t), \qquad k \geq 0.$$

其中,

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_k(t) &:= \frac{1}{k!}e^t\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(t^k e^{-t})\\
&= \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}C_k^j\,t^j
\end{aligned}$$

被称为 Laguerre 多项式, L_k 满足下面的 Laguerre 微分方程:

$$t\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + (1-t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = 0, \quad t > 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

前 4 个 Laguerre 多项式是

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1, \qquad L_1(t) = 1 - t, \\ L_2(t) &= 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2, \qquad L_3(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3. \end{aligned}$$

在一般的 Hilbert 空间中，标准正交基有下述等价刻画.

定理 4.52 设 $S = \{e_k:\ k \in \mathbf{N}\}$ 为 Hilbert 空间 H 中的标准正交系，则下述一些条件等价：

(1) S 是 H 的完全标准正交系；

(2) $S^{\perp} = \{0\}$ (此条件满足时称 S 为完备的)；

(3) $\overline{\text{span}S} = H$；

(4) 对于任意的 $x \in H$，$x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$；

(5) 对于任意的 $x \in H$，Parseval 等式成立，即

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2;$$

(6) 对于任意的 x，$y \in H$，

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle \overline{\langle y, e_k\rangle}.$$

证明

(1) $\Longleftrightarrow$(2) 直接由定义得出.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3)，由于 $(\text{span}S)^{\perp} = S^{\perp}$，从而

$$\overline{\text{span}S} = H \Longleftrightarrow (\text{span}S)^{\perp} = \{0\} \Longleftrightarrow S^{\perp} = \{0\}.$$

(2)$\Longrightarrow$(4)，由于 Hilbert 空间中 Fourier 级数的收敛性，对于任意的 $x \in H$，

$$y = x - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle e_k,$$

有意义，但是对于任意的 $i \in \mathbf{N}$，

$$\langle y, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle \langle e_k, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle = 0,$$

故 $y \in S^{\perp}$, 从而 $y = 0$, 这样就可以得到

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

此式是有限维空间 (特别是普通的 $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$) 中向量关于标准正交基的坐标分解式的推广，因此通常称完全标准正交系为标准正交基.

(4)$\Longrightarrow$ (6), $\forall x, y \in H$, 有

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k, \quad y = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle y, e_i \rangle e_i.$$

由内积的性质，可以得到

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{i=1}^{+\infty} \langle y, e_i \rangle e_i \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle} \langle e_k, e_i \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle y, e_k \rangle}. \end{aligned}$$

(6) $\Longrightarrow$(5), 取 $x = y$, 则获得

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

(5) $\Longrightarrow$(1), 如果 S 不是完全的，则存在单位向量 $e_0 \in H$, $\|e_0\|^2 = 1$, $e_0 \perp S$, 这样就自然会有

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle e_0, e_k \rangle|^2 = 0,$$

但由 (5) 知

$$\|e_0\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |\langle e_0, e_k \rangle|^2,$$

这样就产生了矛盾.

推论 4.53 在 $L^2([-\pi, \pi])$ 中，标准正交系

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \quad \cdots \right\},$$

(1) S 是完全系;

(2) S 是完备系;

(3) 对任意的 $f \in L^2([-\pi,\pi])$, 都有

$$\|f\|_2^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2);$$

(4) 对于任意的 $f \in L^2([-\pi,\pi])$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)),$$

上式右端按 $\|\cdot\|_2$ 范数去理解.

定理 4.54 设 H 是 Hilbert 空间, 则下述两条等价:

(1) H 是可分的;

(2) H 有一个至多可数的完全标准正交系.

证明

我们仅证明 (1) $\Longrightarrow$(2) 设 H 是可分的, 则 H 有一个处处稠密的可数子集 $\{x_1, x_2, \cdots\}$, 其中必存在一个线性无关的子集. 具体抽取步骤如下: 设 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 中第一个非零向量为 x_{n_1}, 则取 $y_1 = x_{n_1}$. 又设在 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 中第一个与 x_{n_1} 线性无关的向量为 x_{n_2}, 则取 $y_2 = x_{n_2}$. 利用数学归纳法可取出 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ 中线性无关的向量组 $\{x_{n_k}\}$, 令 $y_k = x_{n_k}$, 则 $\{y_k\}$ 为线性无关集, 而且 $\mathrm{span}\{x_n\} = \mathrm{span}\{y_k\}$, 从而, 若 $\{y_k\}$ 为有限集, 则 $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots\}$ 为有限维空间, 若 $\{y_k\}$ 为可数集, 则 $\mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots\}$ 为无限维空间. 再对 $\{y_k\}$ 应用 Gram-Schmidt 正交化过程, 便构造出一个标准正交系 $\{e_k\}$, 而且 $\mathrm{span}\{e_k\} = \mathrm{span}\{x_k\} = \mathrm{span}\{y_k\}$. 又因为 $\overline{\mathrm{span}\{x_n\}} \supset \overline{\{x_n\}} = H$, 因而, $\overline{\mathrm{span}\{e_k\}} = H$, 故 $\{e_k\}$ 是完全标准正交系.

注 设 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交基, 对任意的自然数 n, 设 E_n 是由 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 生成的有限维子空间. 对任一 $x \in H$, x 在 E_n 中的最佳逼近元是

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle e_k.$$

能够简单地计算 x 在 E_{n+1} 中的最佳逼近元是: $x_{n+1} = x_n + \langle x, e_{n+1}\rangle e_{n+1}$. 这说明后一次的计算可以有效地利用前一次的结果. 反之, 考虑 H 的一个基 $\{f_k\}$, 它不是正交的. 设 F_n 是由 f_1、f_2、$\cdots, f_n$ 生成的有限维子空间, 对

于任一 $x \in H$, x 在 F_n 中的最佳逼近元可以表示为 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$, 系数 α_k 由以下唯一确定:

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k, f_j \right\rangle = 0, \qquad j = 1, \ 2, \ \cdots, \ n.$$

一般情况下, 系数 α_k 依赖于 n, 由于这样的原因, 要想在空间 F_{n+1} 中找到 x 的最佳逼近元就必须计算所有 $n+1$ 个系数 α_1, α_2, $\cdots$, α_{n+1}. 由此可知, 为了快速计算是人们研究标准正交基的原因之一.

§4.8 Hilbert 空间的同构

如果 T 是 $H_1 \longrightarrow H_2$ 的同构映射, 则其逆映射 T^{-1} 是 $H_2 \longrightarrow H_1$ 的同构映射, 而且同构是 Hilbert 空间类中的等价关系, 即就是 H 同构于 H 自身; 如果 H_1 同构于 H_2, 则 H_2 同构于 H_1; 如果 H_1 同构于 H_2, H_2 同构于 H_3, 则 H_1 同构于 H_3.

定理 4.55

(1) n 维实 Hilbert 空间都与 $\mathbf{R}^n$ 同构;

(2) n 维复 Hilbert 空间都与 $\mathbf{C}^n$ 同构.

证明 我们仅证明 (1), (2) 的证明是类似的. 设 H 为 n 维实 Hilbert 空间, 由 Gram-Schmidt 正交化过程, 可构造出标准正交基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. 作 H 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射 T,

$$T x = (\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \cdots, \langle x, e_n\rangle) \in \mathbf{R}^n, \qquad \forall x \in H.$$

容易验证 T 是 H 到 $\mathbf{R}^n$ 的一一线性映射, 而且满足

$$\langle T x, T y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \langle y, e_k\rangle = \langle x, y\rangle.$$

因此, H 和 $\mathbf{R}^n$ 同构.

为了研究无限维可分的 Hilbert 空间, 先证明下面的 Riesz-Fisher 定理.

定理 4.56 (Riesz-Fisher 定理) 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 H 的标准正交系, 则对于任意的 $(x_1, x_2, \cdots) \in l^2$, 一定存在唯一的 $x \in H$, 使得

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k e_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k,$$

其中 $x_k = \langle x, e_k \rangle\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$, 并且有 Parseval 等式

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2.$$

证明 令 $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$. 则 $y_n \in H$. 当 $m > n$ 时, 有

$$\|y_m - y_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |x_k|^2 \longrightarrow 0\,(m,\ n \to +\infty).$$

即就是说 $\{y_n\}$ 是 H 中的基本点列, 因为 H 是完备的, 故存在唯一的 $x \in H$, 使得

$$x = \lim_{n\to+\infty} y_n = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k e_k,$$

因此有, $\langle x, e_k \rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle y_n, e_k \rangle = x_k$. 又因为

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$ 可以得到

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2.$$

定理 4.57 无限维可分 Hilbert 空间与 l^2 空间等距同构.

证明 设 H 是无限维可分 Hilbert 空间, 则 H 中有可数集构成的标准正交基 $\{e_n:\ n \in \mathbf{N}\}$. 作 H 到 l^2 中的映射 T,

$$T x = \widetilde{x} = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \cdots, \langle x, e_n \rangle, \cdots), \quad \forall x \in H.$$

由 Bessel 不等式知

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \|x\|^2,$$

故 $\widetilde{x}\in l^2$. 另一方面, 对于任意的 $\widetilde{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in l^2$, 由 Riesz-Fisher 定理知, $x=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\xi_k e_k\in H$, 而且 $\xi_k=\langle x,e_k\rangle$, 因而 $Tx=\widetilde{x}$, 这就说明 $T:\ H\longrightarrow l^2$ 是满射. 显然 T 是线性映射. 又因为

$$\langle Tx,Ty\rangle=\sum_{k=1}^{+\infty}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}=\langle x,y\rangle.$$

故 T 是保范的, 从而 T 是单射. 因此, T 是由 H 到 l^2 的同构映射, 此时自然就会有 H 与 l^2 同构.

推论 4.58 $L^2([0,1])$ 空间与 l^2 空间等距同构.

第五章 线性算子的一般理论

线性算子理论构成泛函分析的核心内容，它是泛函分析应用于各个领域的主要工具. 近代数学与工程实际中的许多问题如果能够看成定义在某空间上的算子或算子方程就可以利用泛函分析方法进行研究.

本章主要介绍线性算子与线性泛函的基本概念和性质，在此基础上着重介绍泛函分析的基本定理 ——— 逆算子定理、闭图像定理、一致有界原理与 Hahn-Banach 定理. 最后讨论对偶空间、自反空间、弱收敛以及对偶算子等内容.

§5.1 有界性与连续性

让我们回顾线性算子与线性泛函的有关概念.

定义 5.1 设 X 和 Y 都是数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间，$T: X \to Y$. 如果对于任意的 $x, y \in X$ 有：$T(x+y) = Tx + Ty$, 则称 T 是 **可加的**. 若对任意的数 $\alpha \in \mathbf{F}$ 及任意的 $x \in X$ 有：$T(\alpha x) = \alpha T x$, 则称 T 是 **齐次的**. 可加齐次的映射称为 **线性映射** 或 **线性算子**. X 称为 T 的 **定义域**, 记作 $D(T) = X$. $R(T) := \{y \in Y: y = Tx, x \in X\}$ 称为 T 的 **值域**. X 中使得 $Tx = 0$ 的元素 x 的集合称为 T 的 **零空间**, 记作 $\ker(T)$, 即 $\ker(T) := \{x: Tx = 0, x \in X\} = T^{-1}(\{0\})$. 特别地，将线性算子 $T: X \longrightarrow \mathbf{F}$ 称为 **线性泛函**.

定义 5.2 设 X 和 Y 都是数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间，$T: X \to Y$ 是一个线性算子，$x_0 \in X$. 如果对于 X 中任何收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$, 恒有 $Tx_n \longrightarrow Tx_0 (n \to +\infty)$. 此时称 T**在点 x_0 处连续**. 若 T 在 X 内每一点都连续，则称 T**在 X 上连续**. 如果存在正常数 M, 使得对一切 $x \in X$, 有 $\|Tx\| \le M\|x\|$, 则称 T 是 **有界的**. 否则称 T 是 **无界的**.

例 5.3 设 X 是赋范线性空间, 对于任意的 $x \in X$ 定义算子 $I(x) := x$, 则 I 是 X 上的一个有界线性算子，它也是一个连续线性算子，称它为 X 上的 **单位算子** 或 **恒等算子**. 将 X 中每个元映成 0 的算子，称它为 **零算子**. 零算子既是有界的也是连续的.

例 5.4 解析几何中常见的旋转变换

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta, \end{cases} \quad (\theta\text{为一个给定的角度})$$

是 $\mathbf{R}^2$ 到它自身的一个有界线性算子，它也是一个连续线性算子.

例 5.5 连续函数的积分

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \forall x \in C([a,b])$$

是定义在连续函数空间 $C([a,b])$ 上的一个有界线性泛函，它也是一个连续线性泛函.

定理 5.6 设 X 和 Y 都是数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间，T： $X \to Y$ 是一个线性算子．如果 T 在某一点 $x_0 \in X$ 连续，则 T 在 X 上连续.

证明 任取 x_n、$x \in X$，$n = 1, 2, \cdots$ 并且设 $x_n \longrightarrow x\,(n \to +\infty)$，由 T 的可加性，有

$$T\,x_n - T\,x = T(x_n - x) = T(x_n - x + x_0) - T\,x_0.$$

由于 $x_n - x + x_0 \longrightarrow x_0\,(n \to +\infty)$，$T$ 在 x_0 连续，我们有 $T(x_n - x + x_0) \longrightarrow T\,x_0\,(n \to +\infty)$．故 $T\,x_n \longrightarrow T\,x\,(n \to +\infty)$．因此，$T$ 在 x 处是连续的.

注 由定理 5.6 知道，要验证一个线性算子是否连续，只要验证它在某一点 (通常验证 0 点) 是否连续就可以了.

定理 5.7 设 X 和 Y 都是数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间，T： $X \to Y$ 是一个线性算子．则 T 连续的充分必要条件是 T 有界.

证明 充分性的证明． 设 T 有界，则存在 $M > 0$，使得对一切 $x \in X$ 有，$\|T\,x\| \le M\,\|x\|$．任取点列 $\{x_n\} \subset X$，$n = 1, 2, \cdots$，使得 $x_n \longrightarrow x\,(n \to +\infty)$，于是

$$\|T\,x_n - T\,x\| = \|T(x_n - x)\| \le M\,\|x_n - x\| \longrightarrow 0\,(n \to +\infty),$$

因此，T 在 X 内任一点 x 处是连续的.

必要性的证明 (用反证法)．设 T 连续但无界，则对每个自然数 n，必存在 $x_n \in X$，$x_n \ne 0$，$n = 1, 2, \cdots$，使得 $\|T\,x_n\| \ge n\,\|x_n\|$．因 $x_n \ne 0$，从而可以令 $y_n = x_n/(n\,\|x_n\|)$，则 $\|y_n\| = 1/n$，因此 $\|y_n\| \longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$，

从而 $y_n \longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$. 由 T 的连续性知，$Ty_n \longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$. 另一方面，考虑到 $y_n = x_n/(n\|x_n\|)$，就有

$$\|Ty_n\| = \left\|\frac{Tx_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} \geq 1.$$

这就说明 $Ty_n \not\longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$. 当然，这与 $y_n \longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$ 相矛盾，故 T 有界.

注　定理 5.7 表明，对线性算子来说有界性与连续性是等价的.

§5.2　线性算子的范数

对于有界线性算子，我们将定义算子的范数，它是一个重要概念. 为了对这一概念有比较清晰的了解，先作一些解释. 设 X 和 Y 都是数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间，$T:\ X \to Y$ 是一个有界线性算子，$x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$. 由 T 的齐次性，对任何不等于零的数 α，当 $x = \alpha x_0$ 时，恒有

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|},$$

因此 $\|Tx_0\|/\|x_0\|$ 是沿 x_0 方向的向量经过算子 T 作用后的伸长率. 当 x_0 在 X 中变化时，相应的伸长率也随着变化. 在关于有界性的定义中 M 便是这些伸长率构成的集合 $\mathcal{M}$ 的一个上界. 上界当然不唯一，我们取其中一个特殊的，把它称为 T 的范数，即就是最大的伸长率.

定义 5.8　设 X 和 Y 都是数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间，$T:\ X \to Y$ 是一个有界线性算子. 令

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

则称 $\|T\|$ 为 T 的 **算子范数**，简称为 **范数**.

定理 5.9　设 X 和 Y 都是数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间，$T:\ X \to Y$ 是有界线性算子，则有

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|:\ \|x\| \leq 1,\ x \in X\}\\ &= \sup\{\|Tx\|:\ \|x\| = 1,\ x \in X\}\\ &= \inf\{M:\ \|Tx\| \leq M\|x\|,\ \forall x \in X\},\end{aligned}$$

特别地，对于任意的 $x \in X$，恒有 $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$.

证明 因为

$$
\begin{aligned}
&\{\|Tx\|:\ x \in X,\ \|x\| = 1\}\\
=&\ \left\{\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|:\ x \in X,\ x \neq 0\right\}\\
=&\ \left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}:\ x \in X,\ x \neq 0\right\} \subset \{\|Tx\|:\ x \in X,\ \|x\| \le 1\},
\end{aligned}
$$

所以

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|:\ x \in X,\ \|x\| = 1\} \le \sup\{\|Tx\|:\ x \in X,\ \|x\| \le 1\}.$$

另一方面，我们有

$$
\begin{aligned}
&\sup\{\|Tx\|:\ x \in X,\ \|x\| \le 1\}\\
=&\ \sup\{\|Tx\|:\ x \in X,\ \|x\| \le 1,\ x \neq 0\}\\
\le&\ \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}:\ x \in X,\ \|x\| \le 1,\ x \neq 0\right\}\\
\le&\ \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}:\ x \in X,\ x \neq 0\right\} = \|T\|.
\end{aligned}
$$

因此

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|:\ \|x\| \le 1,\ x \in X\}.$$

令 $\alpha = \inf\{M:\ \|Tx\| \le M\|x\|,\ \forall\ x \in X\}$. 现在要证明：$\alpha = \sup\{\|Tx\|:\ \|x\| \le 1,\ x \in X\}$. 对 $x \neq 0$ 有，$\|x/\|x\|\| = 1$，从而有

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \sup\{\|Tx\|:\ \|x\| \le 1,\ x \in X\}.$$

对 $x = 0$ 前式显然成立，即对于任意的 $x \in X$，始终有

$$\|Tx\| \le \sup\{\|Tx\|:\ \|x\| \le 1,\ x \in X\}\|x\|.$$

由 α 的定义，$\alpha \le \sup\{\|Tx\|:\ \|x\| \le 1,\ x \in X\}$. 另一方面，如果 M 满足条件：对任意的 $x \in X$，$\|Tx\| \le M\|x\|$，则当 $\|x\| \le 1$ 时自然地有 $\|Tx\| \le M$，所以 $\sup\{\|Tx\|:\ \|x\| \le 1,\ x \in X\} \le M$，故

$$\sup\{\|Tx\|:\ \|x\| \le 1,\ x \in X\} \le \alpha.$$

所以，$\sup\{\|Tx\|: \|x\| \le 1, x \in X\} = \inf\{M: \|Tx\| < M\|x\|, \forall x \in X\}$.

注　定理 5.9 表明有界线性算子的范数可以采用不同的等价形式. 不等式 $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$ 给出 $\|Tx\|$ 的某种最佳估计. 此不等式在以后经常使用.

§5.3　求有界线性算子范数的实例分析

现在举几个例子, 说明如何估计算子的范数以及如何求出算子的范数. 一般情况下求算子范数是很困难的.

例 5.10　赋范线性空间 X 上的相似算子 $Tx = \alpha x$ 是有界线性算子, 而且 $\|T\| = |\alpha|$. 若 $\alpha = 1$, 则 T 为单位算子, 因此 $\|I\| = 1$. 若 $\alpha = 0$, 则 T 为零算子, 因此 $\|\theta\| = 0$.

例 5.11　在内插理论中, 我们通常用 Lagrange 公式来求已知连续函数的近似多项式. 设 $x \in C([a,b])$. 在 $[a,b]$ 内任取 n 个点 $a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b$. 作多项式

$$P_k(t) := \frac{(t-t_1)(t-t_2)\cdots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\cdots(t-t_n)}{(t_k-t_1)(t_k-t_2)\cdots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\cdots(t_k-t_n)},$$

$$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

再让

$$L_n x := y,\quad y(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\,P_k(t),$$

则 L_n 是 $C([a,b])$ 到其自身的有界线性算子, 而且

$$\|L_n\| = \max\{\sum_{k=1}^{n} |P_k(t)|:\ \forall t \in [a,b]\}. \tag{5.3.1}$$

证明　L_n 的线性是明显的. 现在证明 (5.3.1) 式, 令 $\alpha = \max\limits_{a\le t\le b} \sum\limits_{k=1}^{n} |P_k(t)|$, 则

$$\|L_n x\| = \max_{a\le t\le b}\left|\sum_{k=1}^{n} x(t_k)\,P_k(t)\right| \le \alpha \max_{a\le t\le b}|x(t)| = \alpha\,\|x\|_\infty.$$

故 $\|L_n\| \le \alpha$.

另一方面，由于 $\sum\limits_{k=1}^{n}|P_k(t)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，故存在 $t_0\in[a,b]$ 使得

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n}|P_k(t_0)|.$$

取 $x_0\in C([a,b])$ 使得 $\|x_0\|_\infty=1$，$x_0(t_k)=\mathrm{sgn}(P_k(t_0))$，$k=1,2,\cdots,n$. 于是

$$\begin{aligned}\|L_n x_0\| &\geq |(L_n x_0)(t_0)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{sgn}(P_k(t_0))\,P_k(t_0)\right|\\&=\sum_{k=1}^{n}|P_k(t_0)|=\alpha.\end{aligned}$$

故 $\|L_n\|\geq\alpha$, 从而 $\|L_n\|=\alpha$.

例 5.12　设 $K(s,t)$ 是定义在 $0\leq s\leq 1$，$0\leq t\leq 1$ 上的连续实函数，在实连续函数空间 $C([0,1])$ 中定义积分算子

$$(Tx)(s)=\int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,\mathrm{d}t,$$

则 T 为 $C([0,1])$ 到其自身的有界线性算子，而且

$$\|T\|\leq\max_{0\leq s\leq 1}\int_0^1|K(s,t)|\,\mathrm{d}t. \tag{5.3.2}$$

证明　T 的线性是明显的. 事实上，对于任意的 x，$y\in C([0,1])$，α，$\beta\in\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}&[T(\alpha x+\beta y)](s)\\=&\int_0^1 K(s,t)\,(\alpha x+\beta y)(t)\,\mathrm{d}t\\=&\int_0^1 K(s,t)\,[\alpha x(t)+\beta y(t)]\,\mathrm{d}t\\=&\alpha\int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,\mathrm{d}t+\beta\int_0^1 K(s,t)\,y(t)\,\mathrm{d}t\\=&\alpha(Tx)(s)+\beta(Ty)(s)=(\alpha Tx+\beta Ty)(s).\end{aligned}$$

故

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty.$$

下面证明 T 的有界性及不等式 (5.3.2). 令

$$M = \max_{0 \le s \le 1} \int_0^1 |K(s,t)|\,\mathrm{d}t,$$

则对于任意的 $x \in C([0,1])$, 有

$$\begin{aligned}\|Tx\|_\infty &= \max_{0\le s\le 1} \left|\int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \max_{0\le s\le 1} |x(s)| \max_{0\le s\le 1} \int_0^1 |K(s,t)|\,\mathrm{d}t = M\,\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

故 T 是有界的, 而且 $\|T\| \le M$.

注　实际上, 可以证明 $\|T\| = \max\limits_{0\le s\le 1} \int_0^1 |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$.

例 5.13　对于任何 $x \in L^1([a,b])$, 定义

$$(Tx)(t) = \int_a^t x(s)\,\mathrm{d}s.$$

则 T 为 $L^1([a,b])$ 到其自身的有界线性算子, 而且 $\|T\| = b-a$.

证明　对于任意的 x, $y \in L^1([a,b])$, α, $\beta \in \mathbf{C}$, $t \in [a,b]$, 有

$$\begin{aligned}&[T(\alpha x + \beta y)](t) \\ =\ & \int_a^t [\alpha x(s) + \beta y(s)]\,\mathrm{d}s \\ =\ & \alpha \int_a^t x(s)\,\mathrm{d}s + \beta \int_a^t y(s)\,\mathrm{d}s \\ =\ & \alpha (Tx)(t) + \beta (Ty)(t) = [\alpha Tx + \beta Ty](t).\end{aligned}$$

故 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$. 这说明 T 是线性算子.

下面证明 T 的有界性以及 $\|T\| = b-a$.

$$\begin{aligned}\|Tx\|_1 &= \int_a^b |(Tx)(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left|\int_a^t x(s)\,\mathrm{d}s\right| \mathrm{d}t \\ &\le \int_a^b \left(\int_a^t |x(s)|\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \le \int_a^b \left(\int_a^b |x(s)|\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b |x(s)|\,\mathrm{d}s = (b-a)\,\|x\|_1.\end{aligned}$$

所以 T 是有界的, 而且 $\|T\| \le b-a$.

另一方面，对于自然数 n 作函数 (假定 n 足够大，使得 $a+\frac{1}{n}<b$)

$$x_n(t)=\begin{cases} n, & t\in[a,a+\frac{1}{n}],\\ 0, & t\in(a+\frac{1}{n},b],\end{cases}$$

显然，$x_n\in L^1([a,b])$，而且

$$\|x_n\|_1=\int_a^b|x_n(t)|\,\mathrm{d}t=1,$$

进而有

$$\begin{aligned}\|Tx_n\|_1 &= \int_a^b\left|\int_a^t x_n(s)\,\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t\\ &= \int_a^{a+\frac{1}{n}}\left|\int_a^t x_n(s)\,\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t+\int_{a+\frac{1}{n}}^b\left|\int_a^t x_n(s)\,\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t\\ &= \int_a^{a+\frac{1}{n}}n(t-a)\,\mathrm{d}t+\int_{a+\frac{1}{n}}^b\left|\int_a^{a+\frac{1}{n}}n\,\mathrm{d}s+\int_{a+\frac{1}{n}}^t 0\,\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t\\ &= \int_a^{a+\frac{1}{n}}n(t-a)\,\mathrm{d}t+\int_{a+\frac{1}{n}}^b 1\,\mathrm{d}t\\ &= (b-a)-\frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

故，$\|T\|\geq\sup\limits_n\|Tx_n\|_1\geq b-a$. 因此，$\|T\|=b-a$.

例 5.14　考虑积分算子

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(s)\,\mathrm{d}s.$$

试证明

(1) 当把 T 看作 $C([a,b])\longrightarrow C([a,b])$ 的算子时，$\|T\|=b-a$;

(2) 当把 T 看作 $L^1([a,b])\longrightarrow C([a,b])$ 的算子时，$\|T\|=1$.

证明　(1) 任取 $x\in C([a,b])$，注意到 $C([a,b])$ 中的范数为 $\|x\|_\infty=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$，则

$$\|Tx\|_\infty=\max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^t x(s)\,\mathrm{d}s\right|\leq\int_a^b|x(s)|\,\mathrm{d}s\leq(b-a)\,\|x\|_\infty.$$

故 $\|T\|\leq b-a$.

另一方面，取 $x_0(t)=1$. 则 $\|x_0\|_\infty=1$，$\|Tx_0\|_\infty=b-a$, 故

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|_\infty\ge\|Tx_0\|_\infty=b-a,$$

因此，$\|T\|=b-a$.

(2) 任取 $x\in L^1([a,b])$. 则

$$\begin{aligned}\|Tx\|_\infty &= \max_{a\le t\le b}\left|\int_a^t x(s)\,\mathrm{d}s\right|\le\max_{a\le t\le b}\int_a^t|x(s)|\,\mathrm{d}s\\ &= \int_a^b|x(s)|\,\mathrm{d}s=\|x\|_1.\end{aligned}$$

故 $\|T\|\le1$.

另一方面，取 $x_0(t)=\dfrac{1}{b-a}$. 显然，$\|x_0\|_1=1$, 则

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|_\infty\ge\|Tx_0\|_\infty=\max_{a\le t\le b}\int_a^t\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}s=1.$$

所以 $\|T\|\ge1$. 因此，$\|T\|=1$.

例 5.15 (无界线性算子)

(1) 在连续函数空间 $C([0,1])$ 中讨论微分算子 $T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 将在 $[0,1]$ 上有一阶连续导函数的函数全体记为 $C^1([0,1])$, 以它作为 T 的定义域，则 T 是定义在 $C^1([0,1])$ 上并且在 $C([0,1])$ 中取值的线性算子，这里把 $C^1([0,1])$ 作为 $C([0,1])$ 的子空间看待. 我们将证明 T 是无界的.

(2) 设 X 是仅含有限个非零项的数列全体，它作为 l^∞ 的子空间是一个赋范线性空间. 对于任给的 $x=(x_k)\in X$, 定义线性算子 $T:\ X\to X$ 如下：

$$Tx=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}k\,x_k,0,0,\cdots\right),$$

我们将证明 T 是无界的.

证明 (1) 取 $x_n(t)=\sin(nt)$. 则 $\|x_n\|_\infty=1$, 但是

$$\|Tx_n\|_\infty=\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(nt)\right\|_\infty=n\,\|\cos(nt)\|_\infty=n\to+\infty\ (n\to+\infty),$$

故 T 将 $C^1([0,1])$ 中的单位球面映成 $C([0,1])$ 中的无界集. 因此，T 是无界的.

(2) 以 e_k 表示第 k 项是 1 其余项为零的数列，则 $e_k \in X$, $\|e_k\|_\infty = 1$，但是对于任意的自然数 k, $\|Te_k\|_\infty = k$，因此 T 是一个无界算子.

例 5.16 设 $C^1([0,1])$ 表示在 $[0,1]$ 上有一阶连续导函数的函数全体，在 $C^1([0,1])$ 中引入范数

$$\|x\|_1 := \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1}|x'(t)|,$$

则 $C^1([0,1])$ 也构成赋范线性空间 (注意：此时 $C^1([0,1])$ 并不是 $C([0,1])$ 的子空间)，此时把 $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 看作 $C^1([0,1])$ 到 $C([0,1])$ 的算子，则 T 是有界线性算子.

证明 对任意 $x \in C^1([0,1])$，有

$$\begin{aligned}\|Tx\|_\infty &= \max_{0\le t\le 1}|(Tx)(t)| = \max_{0\le t\le 1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right| \\ &\le \max_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max_{0\le t\le 1}|x'(t)| = \|x\|_1.\end{aligned}$$

由算子范数的定义知，$\|T\| \le 1$，故 T 是 $C^1([0,1])$ 到 $C([0,1])$ 的有界线性算子.

§5.4 有限维赋范线性空间上的线性算子

若要具体地描述一个线性算子 T，必须对 T 的定义域中每一个向量 x，都能具体说出 Tx 是什么，或者能找到一个规律，使得凭着这个规律，就能从 x 具体地找出 Tx 来. 当 T 定义在一般的线性空间中，这个问题很难解决，但是当 T 的定义域为有限维赋范线性空间时，较容易解决.

设 X 与 Y 都是同一数域上的有限维赋范线性空间，又设 X 是 n 维，Y 是 m 维，从而可以选择 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 作为 X 的一个基，而 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$ 是 Y 的一个基. 于是，对任意的 $x \in X$，都有唯一的表示

$$x = \sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k, \quad \xi_k \in \mathbb{F}.$$

故，$Tx = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k Te_k$. 因此，如果 $Te_1, Te_2, \cdots, Te_n$ 都知道了，那么 Tx 也就知道了. 所以，要具体描述 T，只要知道定义域中一个基 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的像 $Te_1, Te_2, \cdots, Te_n$ 就可以了.

定理 5.17 设 X 和 Y 都是有限维赋范线性空间，$T: X \longrightarrow Y$ 是一个线性算子，X 的一个基为 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，$Y$ 的一个基为 $\{f_1, f_2, \cdots, f_m\}$，并且已知 $e_k\,(k=1, 2, \cdots, n)$ 的像为

$$T e_k = \sum_{j=1}^{m} t_{jk} f_j, \qquad \text{系数 } t_{jk} \text{ 均为已知,} \tag{5.4.1}$$

则定义域 X 中任意元 $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ 的像 $Tx = \sum\limits_{k=1}^{m} \eta_k f_k$ 中的系数 η_k 为

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{n} t_{kj} \xi_j, \qquad k=1, 2, \cdots, m, \tag{5.4.2}$$

(5.4.2) 中的矩阵恰为 (5.4.1) 式中矩阵的转置.

证明 因为

$$\begin{aligned} Tx &= T\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{j=1}^{m} t_{jk} f_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} t_{jk} \xi_k\right) f_j = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{kj} \xi_j\right) f_k. \end{aligned}$$

再由假设 $Tx = \sum\limits_{k=1}^{m} \eta_k f_k$. 比较 Tx 的两个表达式中 f_k 的系数，我们就会有

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{n} t_{kj} \xi_j, \qquad k=1, 2, \cdots, m.$$

(5.4.1) 与 (5.4.2) 的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} Te_1 \\ Te_2 \\ \vdots \\ Te_n \end{pmatrix} = (t_{jk})_{n\times m} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \tag{5.4.3}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = (t_{kj})_{m\times n} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \tag{5.4.4}$$

注

(1) 由定理可知，有限维赋范线性空间上的线性算子 T，当定义域与值域中的基确定之后，它与矩阵 $(t_{kj})_{m\times n}$ 是一一对应的，记作 $T\sim(t_{kj})_{m\times n}$.

(2) 在有限维赋范线性空间 $\mathbf{F}^n$ 上，当 $p\geq 1$ 时，定义 p 范数 $\|\cdot\|_p$ 为：对任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{F}^n$，定义 $\|x\|_p:=(\sum\limits_{k=1}^n|\xi_k|^p)^{1/p}$. 也可以定义 $\|\cdot\|_\infty$，$\|x\|_\infty:=\max\limits_{1\leq k\leq n}|\xi_k|$. 容易验证 $\|\cdot\|_p$ 和 $\|\cdot\|_\infty$ 都是 $\mathbf{F}^n$ 上的范数，而且 $(\mathbf{F}^n,\|\cdot\|_p)$ 和 $(\mathbf{F}^n,\|\cdot\|_\infty)$ 都是 Banach 空间. $(\mathbf{F}^n,\|\cdot\|_p)$ 可以看作 $(l^p,\|\cdot\|_p)$ 的子空间. 仅需将 $x\in\mathbf{F}^n$ 等同于 l^p 中的元 $(x_1,x_2,\cdots,x_n,0,\cdots)$.

定理 5.18 设 X 是有限维赋范线性空间，而 Y 是任意的赋范线性空间. 若 $T:\ X\longrightarrow Y$ 是线性算子，则 T 是连续的.

证明 设 X 是 n 维赋范线性空间，在 X 上取一个基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，对于任意的 $x\in X$，则

$$x=\sum_{k=1}^n\xi_k e_k\in X.$$

令 $\|x\|_2=(\sum\limits_{k=1}^n|\xi_k|^2)^{1/2}$，则容易验证 $\|\cdot\|_2$ 确实是 X 上的一个范数. 因为

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \left\|\sum_{k=1}^n\xi_k Te_k\right\|\leq\left(\sum_{k=1}^n|\xi_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n\|Te_k\|^2\right)^{1/2},\\ &= C\|x\|_2.\end{aligned}$$

其中 $C=\left(\sum\limits_{k=1}^n\|Te_k\|^2\right)^{1/2}$. 这样一来我们可以看到 T 关于范数 $\|\cdot\|_2$ 是有界的，但是 X 上原来的范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价，也就是说存在 $C_1>0$，对任意的 $x\in X$，满足 $\|x\|_2\leq C_1\|x\|$，故 $\|Tx\|\leq CC_1\|x\|$. 因此，T 关于原来的范数也是有界的，因而是连续的.

例 5.19 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}.$$

令 $y=Ax$. 由于矩阵乘法是线性运算，所以 A 是 $\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}^m$ 的线性算子，在 $\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m$ 中分别定义范数 $\|x\|_\infty:=\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k|$，$\|y\|_\infty:=\max\limits_{1\leq k\leq m}|y_k|$，

则 A 是有界线性算子, 而且算子 A 的范数 $\|A\|_\infty$ 为

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le k\le m}\sum_{j=1}^n|a_{kj}|. \tag{5.4.5}$$

证明 算子 A 的线性是显然的. 今证明 A 的有界性以及等式 (5.4.5). 令 $\alpha=\max\limits_{1\le k\le m}\sum\limits_{j=1}^n|a_{kj}|$, 则

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \max_{1\le k\le m}|y_k|=\max_{1\le k\le m}\left|\sum_{j=1}^n a_{kj}\,x_j\right|\\ &\le \max_{1\le k\le m}\sum_{j=1}^n|a_{kj}|\,|x_j|\le\max_{1\le j\le n}|x_j|\max_{1\le k\le m}\sum_{j=1}^n|a_{kj}|\\ &= \alpha\,\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

故 A 是有界的, 而且 $\|A\|_\infty\le\alpha$.

另一方面, 令

$$\sum_{j=1}^n|a_{pj}|=\max_{1\le k\le m}\sum_{j=1}^n|a_{kj}|,$$

取 $x_0=(\mathrm{sgn}(a_{p1}),\mathrm{sgn}(a_{p2}),\cdots,\mathrm{sgn}(a_{pn}))^{\mathrm{T}}$, 则 $\|x_0\|_\infty=1$, 而且有

$$\begin{aligned}\|Ax_0\|_\infty &= \max_{1\le k\le m}\left|\sum_{j=1}^n\mathrm{sgn}(a_{pj})\,a_{kj}\right|\ge\left|\sum_{j=1}^n\mathrm{sgn}(a_{pj})\,a_{pj}\right|\\ &= \sum_{j=1}^n|a_{pj}|=\max_{1\le k\le m}\sum_{j=1}^n|a_{kj}|=\alpha.\end{aligned}$$

从而可知等式 (5.4.5) 成立.

例 5.20 已知线性算子 A: $(\mathbf{R}^2,\|\cdot\|_2)\longrightarrow(\mathbf{R}^2,\|\cdot\|_2)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}.$$

试求算子 A 的范数 $\|A\|_2$ 及 A 的特征值.

解 令 $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$. 则

$$Ax=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1+x_2\\x_1+2x_2\end{pmatrix},$$

从而,

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \sup_{x_1^2+x_2^2=1}[5+8x_1x_2]^{1/2}\\ &= \sup_{x_1^2+x_2^2=1}[5-4((x_1-x_2)^2-1)]^{1/2}\\ &= \sup_{x_1^2+x_2^2=1}[9-4(x_1-x_2)^2]^{1/2}=\sqrt{9}=3.\end{aligned}$$

A 的特征多项式为

$$\begin{aligned}|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-4\lambda+3\\ &= (\lambda-1)(\lambda-3).\end{aligned}$$

从而得到 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=3.$

注 $\|A\|_2=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|\}$. 一般地, 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的矩阵算子 A, 容易知道应该有 $\|A\|_2\geq \max\limits_k|\lambda_k|$. λ_k 为 A 的特征值. 这是因为对应于 λ_k 的特征向量 x_k 满足 $Ax_k=\lambda_k x_k$. 所以 $\|Ax_k\|=|\lambda_k|\,\|x_k\|$, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 因而,

$$\|A\|_2\geq \sup_k\frac{\|Ax_k\|}{\|x_k\|}=\max_k|\lambda_k|.$$

自然有一个问题: 矩阵算子在什么条件下, 就会有 $\|A\|_2=\max\limits_k|\lambda_k|$ 呢? 这个问题可以由下面的定理来回答.

定理 5.21 设线性算子 $A:\ (\mathbf{R}^n,\|\cdot\|_2)\longrightarrow(\mathbf{R}^n,\|\cdot\|_2)$ 所对应的矩阵 (a_{ij}) 为对称的, 并且设 A 的特征值为 $\lambda_k\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 则算子 A 的范数为 $\|A\|_2=\max\limits_{1\leq k\leq n}|\lambda_k|$.

例 5.22 求由 $(\mathbf{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$ 到 $(\mathbf{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$ 的矩阵算子

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

的范数 $\|A\|_\infty$.

解 令 $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$, 则

$$Ax=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}.$$

一方面，由

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \max(|a_{11}x_1+a_{12}x_2|,|a_{21}x_1+a_{22}x_2|)\\ &\le \max(|a_{11}x_1|+|a_{12}x_2|,|a_{21}x_1|+|a_{22}x_2|)\\ &\le \max\{(|a_{11}|+|a_{12}|)\max\{|x_1|,|x_2|\},\\ &\quad(|a_{21}|+|a_{22}|)\max\{|x_1|,|x_2|\}\}\\ &\le \max\{|a_{11}|+|a_{12}|,|a_{21}|+|a_{22}|\}\|x\|_\infty.\end{aligned}$$

所以

$$\|A\|_\infty \le \max\{|a_{11}|+|a_{12}|,|a_{21}|+|a_{22}|\}. \tag{5.4.6}$$

另一方面，令 $x_0=(|a_{11}|/a_{11},|a_{12}|/a_{12})^{\mathrm{T}}$. 若分量中分母为 0, 则设该分量为 1, 因此不论 a_{11},a_{12} 是否为 0 都有 $\|x_0\|_\infty=1$, 并且有

$$Ax_0=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|a_{11}|/a_{11}\\|a_{12}|/a_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|a_{11}|+|a_{12}|\\a_{21}\dfrac{|a_{11}|}{a_{11}}+a_{22}\dfrac{|a_{12}|}{a_{12}}\end{pmatrix},$$

$$\|Ax_0\|_\infty=\max\left\{|a_{11}|+|a_{12}|,\left|a_{21}\frac{|a_{11}|}{a_{11}}+a_{22}\frac{|a_{12}|}{a_{12}}\right|\right\}.$$

故

$$\|A\|_\infty=\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|_\infty\ge\|Ax_0\|_\infty\ge|a_{11}|+|a_{12}|.$$

类似可以得到

$$\|A\|_\infty\ge|a_{21}|+|a_{22}|.$$

从而

$$\|A\|_\infty \ge \max\{|a_{11}|+|a_{12}|,|a_{21}|+|a_{22}|\}. \tag{5.4.7}$$

结合 (5.4.6), (5.4.7) 式便有

$$\|A\|_\infty = \max\{|a_{11}|+|a_{12}|,|a_{21}|+|a_{22}|\}.$$

注　设线性算子 $A:\ (\mathbf{R}^n,\|\cdot\|_2)\longrightarrow(\mathbf{R}^n,\|\cdot\|_2)$ 所对应的矩阵 (a_{ij}) 仍然记为 A, 则算子 A 的范数 $\|A\|_2$ 为: $\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^{\mathrm{T}}A)}$, 其中 $\rho(A^{\mathrm{T}}A)$ 表示实对称矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的谱半径 (即最大特征值).

本节最后，我们通过一个例子来考察无穷矩阵所确定的线性算子及其范数的计算问题.

例 5.23 设 $A=(a_{ij})\,(i,j=1,2,\cdots)$ 是一个无穷矩阵，其中 $a_{ij}\in\mathbf{F}$，形式地定义线性算子 $A:\ x\to Ax$ 如下:

$$\begin{cases} y = Ax, & x=(x_j),\ \ y=(y_i), \\ y_i = \sum\limits_{j=1}^{+\infty} a_{ij}x_j, & i=1,2,\cdots. \end{cases}$$

(1) 如果 $\alpha:=\sup\limits_{j}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|a_{ij}|<+\infty$，此时可以将 A 看作 $A:l^1\to l^1$，则 A 为有界线性算子而且 A 的范数 $\|A\|_1=\alpha$;

(2) 如果 $\alpha:=\sup\limits_{i}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|<+\infty$，此时可以将 A 看作 $A:l^\infty\to l^\infty$，则 A 为有界线性算子而且 A 的范数 $\|A\|_\infty=\alpha$;

(3) 如果 $\beta:=\left[\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}|^q\right)^{p/q}\right]^{1/p}<+\infty,\ 1<p=q/(q-1)<+\infty$，此时可以将 A 看作 $A:l^p\to l^p$，则 A 为有界线性算子而且 A 的范数 $\|A\|_p\le\beta$.

证明

(1) 对于任意的 $x=(x_j)\in l^1$，有

$$\sum_{j=1}^{+\infty}|a_{ij}x_j|\le\sup_j|a_{ij}|\,\|x\|_1\le\alpha\,\|x\|_1<+\infty,$$

故 $\sum\limits_{j=1}^{+\infty}a_{ij}x_j$ 收敛. 令 $y_i=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}a_{ij}x_j$，$Ax=(y_i)$，则有

$$\begin{aligned}\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{+\infty}|y_i|=\sum_{i=1}^{+\infty}\left|\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}x_j\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}|a_{ij}|\,|x_j| \\ &\le \alpha\sum_{j=1}^{+\infty}|x_j|=\alpha\,\|x\|_1.\end{aligned}$$

所以 A 为有界线性算子而且 $\|A\|_1\le\alpha$.

为了证明 $\|A\|_1=\alpha$，下面仅需证明 $\|A\|_1\ge\alpha$. 为此，仅需证明对于任意的 $\mu<\alpha$ 都有 $\|A\|_1>\mu$. 根据 α 的定义，存在下标 j_0 使得 $\mu<\sum\limits_{i=1}^{+\infty}|a_{ij_0}|$.

设 $\{e_j\}$ 是 l^1 的标准基，则 $\|e_j\|_1 = 1$, $Ae_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots)$. 于是

$$\begin{aligned}\mu &< \sum_{i=1}^{+\infty} |a_{ij_0}| = \|Ae_{j_0}\|_1 \\ &\leq \|A\|_1 \|e_{j_0}\|_1 = \|A\|_1.\end{aligned}$$

(2) 对于任意的 $x = (x_j) \in l^\infty$, 类似于 (1) 可以得到

$$\begin{aligned}\|Ax\|_\infty &= \sup_i \left|\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j\right| \\ &\leq \sup_i \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}| \|x\|_\infty = \alpha \|x\|_\infty,\end{aligned}$$

所以 A 为有界线性算子而且 $\|A\|_\infty \leq \alpha$. 其次，对于任意的 $\mu < \alpha$, 选取 i_0, 使得 $\mu < \sum\limits_{j=1}^{+\infty} |a_{i_0 j}|$. 令 $x_j = \operatorname{sgn} a_{i_0 j}$, $x = (x_j)$. 不妨设 $0 \leq \mu < \alpha$, 因此 $x \neq 0$, 于是 $\|x\|_\infty = 1$, 故

$$\begin{aligned}\mu &< \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{i_0 j}| = \sum_{j=1}^{+\infty} a_{i_0 j} x_j \\ &\leq \|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|x\|_\infty = \|A\|_\infty.\end{aligned}$$

这便推出 $\|A\|_\infty = \alpha$.

(3) 任意给定 $x = (x_j) \in l^p$, 有

$$\begin{aligned}\|Ax\|_p^p &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left|\sum_{j=1}^{+\infty} a_{ij} x_j\right|^p \\ &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |a_{ij}|^q\right)^{p/q} \|x\|_p^p = (\beta \|x\|_p)^p.\end{aligned}$$

于是 $\|Ax\|_p \leq \beta \|x\|_p$. 因此 A 为有界线性算子而且 $\|A\|_p \leq \beta$.

§5.5 有界线性算子空间、算子列的一致收敛与强收敛

设 $(X, \|\cdot\|_X)$ 与 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 是同一数域 $\mathbf{F}$ 上的两个赋范线性空间，用 $B(X, Y)$ 表示全体有界线性算子 $T: X \to Y$ 的集合. 本节始终用 $X, Y, Z, \cdots$ 表示同一数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间.

定理 5.24 在 $B(X,Y)$ 中定义线性运算如下:

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x,\quad T_1,\ T_2\in B(X,Y),\ x\in X, \tag{5.5.1}$$

$$(\alpha T)x=\alpha(Tx),\quad T\in B(X,Y),\ \alpha\in\mathbf{F}, \tag{5.5.2}$$

则 $B(X,Y)$ 按照上述线性运算是一个线性空间. 若 $B(X,Y)$ 再以算子范数作为范数, 则 $B(X,Y)$ 是一个赋范线性空间.

证明 容易看出 $B(X,Y)$ 按照 (5.5.1), (5.5.2) 确实构成线性空间. 现证它是赋范线性空间, 为此仅需验证范数的三个条件:

(1) $\|T\|\geq 0$ 是显然的. 若 $T=\theta$(零算子), 显然有 $\|T\|=0$. 反之, 若 $\|T\|=0$, 则对一切 $x\in X$, $Tx=0$, 故 $T=\theta$.

(2) $\|\alpha T\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|\alpha Tx\|=|\alpha|\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|=|\alpha|\|T\|$, $\forall\alpha\in\mathbf{F}$.

(3) 对于任意的 $T_1,T_2\in B(X,Y)$, 则

$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\| &= \sup_{\|x\|=1}\|(T_1+T_2)x\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_1x+T_2x\|\\ &\leq \sup_{\|x\|=1}\|T_1x\|+\sup_{\|x\|=1}\|T_2x\|=\|T_1\|+\|T_2\|.\end{aligned}$$

注 今后称 $B(X,Y)$ 为有界线性算子空间. 当 $X=Y$ 时, 我们将 $B(X,X)$ 记作 $B(X)$, 而将任一 $T\in B(X)$ 称为定义在 X 上的有界线性算子. $B(X,Y)$ 中的算子列 $\{T_n\}$ 的收敛概念与一般赋范线性空间相同, 即如果有 $T\in B(X,Y)$, 使得 $\|T_n-T\|\longrightarrow 0\,(n\to+\infty)$, 则称 T_n 按算子范数收敛于 T 或一致收敛于 T. 记作 $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n=T$, 或 $T_n\longrightarrow T\,(n\to+\infty)$.

定义 5.25 设算子列 $\{T_n\}\subset B(X,Y)$, $T\in B(X,Y)$. 若对每一个 $x\in X$ 都有 $T_nx\longrightarrow Tx\,(n\to+\infty)$, 则称**算子列 T_n 强收敛于 T**, 简记为 $T_n\xrightarrow{\text{强}}T\,(n\to+\infty)$.

定理 5.26 设算子列 $\{T_n\}\subset B(X,Y)$, $T\in B(X,Y)$, 那么算子列 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 T 的充分必要条件是 $\{T_n\}$ 在 X 中任一有界集上一致收敛于 T.

证明 必要性的证明. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|T_n-T\|=0$, $A\subset X$ 为有界集因为 A 有界, 所以存在正数 M, 使得当 $x\in A$ 时, 始终有 $\|x\|<M$, 故

$$\|T_nx-Tx\|\leq\|T_n-T\|\|x\|\leq M\|T_n-T\|. \tag{5.5.3}$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 始终存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, $\|T_n - T\| < \varepsilon/M$. 由 (5.5.3), 当 $n > N$ 时, 对于 $x \in A$ 一致地成立不等式 $\|T_n x - T x\| < \varepsilon$, 故算子列 $\{T_n\}$ 在 A 上一致收敛于 T.

充分性的证明　设算子列 $\{T_n\} \subset B(X,Y)$ 在 X 的任一有界集上一致收敛于 $T \in B(X,Y)$. 取 X 中的单位球面 $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $\|T_n x - T x\| < \varepsilon$, 对于 $x \in S$ 一致地成立, 于是

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x - T x\| \le \varepsilon, \quad \forall n > N,$$

故算子列 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 T.

定理 5.27　设算子列 $\{T_n\} \subset B(X,Y)$, $T \in B(X,Y)$. 若 $T_n \longrightarrow T\,(n \to +\infty)$, 则 $T_n \xrightarrow{\text{强}} T\,(n \to +\infty)$.

证明　因为

$$\|T_n x - T x\| = \|(T_n - T)x\| \le \|T_n - T\|\|x\|,$$

所以, 若 $T_n \longrightarrow T\,(n \to +\infty)$, 我们就有 $T_n \xrightarrow{\text{强}} T\,(n \to +\infty)$.

注　$T_n \xrightarrow{\text{强}} T\,(n \to +\infty) \not\Longrightarrow T_n \longrightarrow T\,(n \to +\infty)$.

例 5.28　设 $T_n : l^2 \longrightarrow l^2$, 对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$, 令

$$T_n x := (x_n, x_{n+1}, \cdots).$$

可以证明 $T_n \xrightarrow{\text{强}} \theta\,(n \to +\infty)$ (θ 为零算子), 但是 $T_n \not\longrightarrow \theta\,(n \to +\infty)$.

证明　若 $x \in l^2$, 因为 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_k|^2$ 收敛, 由级数理论知道 $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} |x_k|^2 \longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$, 故

$$\|T_n x\|^2 = \sum_{k=n}^{+\infty} |x_k|^2 \longrightarrow 0\,(n \to +\infty).$$

因此, $T_n \xrightarrow{\text{强}} \theta\,(n \to +\infty)$.

另一方面, 又设 $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$ (仅第 n 项为 1 其他位置是 0), 则 $T_n e_n = (1, 0, \cdots)$, $\|T_n e_n\| = 1$, 但是因为 $\|e_n\| = 1$, 故

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \ge \sup_n \|T_n e_n\| = 1, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

所以 $\|T_n\| \not\longrightarrow 0\,(n\to+\infty)$，这就说明 $T_n \not\longrightarrow \theta\,(n\to+\infty)$.

一般来说，$B(X,Y)$ 作为赋范线性空间不一定完备，但如果 Y 是完备的，则有下面的定理.

定理 5.29　设 Y 是 Banach 空间，则 $B(X,Y)$ 也是 Banach 空间.

证明　设 $\{T_n\}$ 是 $B(X,Y)$ 中的一个基本点列. 于是对于任意给定的 $\varepsilon>0$，始终存在自然数 N，使得当 $m,\ n>N$ 时，有 $\|T_m-T_n\|<\varepsilon$. 任取 $x\in X$，当 $m,\ n>N$ 时，则有

$$\|T_mx-T_nx\|\le\|T_m-T_n\|\|x\|<\varepsilon\|x\|. \tag{5.5.4}$$

故 $\{T_nx\}$ 是 Y 中的基本点列. 依假设 Y 是完备的，故 $\{T_nx\}$ 在 Y 中收敛于某一元素 y. 于是有

$$\lim_{n\to+\infty}T_nx=y. \tag{5.5.5}$$

定义算子 T：$Tx=y$. 现在证明 T 是定义在 X 上而值域包含在 Y 中的有界线性算子，而且 T 是 $\{T_n\}$ 在算子范数意义下收敛的极限.

T 的线性是明显的. 下面证明它的有界性. 由于

$$|\,\|T_m\|-\|T_n\|\,|\le\|T_m-T_n\|\longrightarrow0\,(m,\ n\to+\infty),$$

故 $\{\|T_n\|\}$ 是基本点列，因此 $\{\|T_n\|\}$ 是有界的. 对于 $n=1,\ 2,\ \cdots$，可以设 $\|T_n\|\le M$. 根据

$$\|Tx\|=\lim_{n\to+\infty}\|T_nx\|\le(\lim_{n\to+\infty}\|T_n\|)\|x\|\le M\|x\|\,(x\in X),$$

可知，T 有界并且 $\|T\|\le M$.

最后证明算子列 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 T. 在 (5.5.4) 中令 $m\to+\infty$ 并利用 (5.5.5) 以及等式 $Tx=y$，得到

$$\|T_nx-Tx\|\le\varepsilon\|x\|,\quad x\in X,\ n>N.$$

因此，对于任意的自然数 $n>N$ 有，$\|T_n-T\|\le\varepsilon$，于是，算子列 $\{T_n\}$ 依算子范数收敛于 T. 所以 $B(X,Y)$ 中任一基本点列必有极限. 这就说明了 $B(X,Y)$ 是 Banach 空间.

注

(1) 有界线性算子是一类特殊的但又比较重要的线性算子，它有不少有用的性质，如：一个线性算子如果在一点连续，那么它在整个定义域上都连续. 有界性与连续性等价.

(2) 与有界线性算子密切相关的第一个重要量是它的范数. 而且它满足通常范数的条件. 与有界线性算子密切相连的运算是有界线性算子之间的线性运算. 注意算子范数与空间的范数相关.

(3) $B(X,Y)$ 是一个赋范线性空间, 有利于从更高的层次上来研究有界线性算子.

(4) 在 $B(X,Y)$ 中引入了依算子范数收敛和强收敛的概念, 注意它们的差别.

§5.6 开映射定理、逆算子定理、闭图像定理

在高等数学中介绍过反函数的概念. 当然, 单调函数必存在反函数. 下面将把这个概念和相关结论推广到一般情形.

定义 5.30 (开映射) 设 X 和 Y 都是数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间, 映射 $T:\ X\longrightarrow Y$ 称为**开映射**是指: 对 X 中每一个开集 U, 其像 $T(U)$ 是 Y 中的开集.

注 注意区分开映射与连续映射, 连续映射不一定是开映射. 比如, 函数 $f:\ \mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$, 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=\sin x$, 则 f 是连续的, 但是 f 把 $(0,2\pi)$ 映成 $[-1,1]$, 所以 f 不是开映射.

定理 5.31 (开映射定理) 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 Y 上的有界线性算子, 则 T 是一个开映射.

注

(1) T 的定义域和值域都是 Banach 空间;

(2) T 的定义域是全空间 X, 即 $D(T)=X$;

(3) T 的值域是全空间 Y, 即 $R(T)=Y$;

(4) T 是连续的.

证明 用 $B(x_0,a)$, $U(y_0,b)$ 分别表示 X,Y 中的开球. 下面分三步来完成证明.

(1) 为了证明 T 是开映射, 即对于任意的开集 W, 证明 $T(W)$ 是开集, 当且仅当证明: 存在正数 δ, 使得

$$TB(0,1)\supset U(0,\delta). \tag{5.6.1}$$

事实上, 必要性是显然的 (因为 0 是内点). 下面证明充分性. 因为 T 是线性的, 条件 (5.6.1) 等价于

$$TB(x_0,r)\supset U(Tx_0,r\delta),\quad \forall\ x_0\in X,\ \forall\ r>0.$$

对于任意的 $y_0 \in T(W)$, 由定义知始终存在 $x_0 \in W$, 使得 $y_0 = Tx_0$. 因为 W 是开集, 所以存在 $B(x_0, r) \supset W$. 于是取 $\varepsilon = r\delta$, 我们就有

$$U(Tx_0, \varepsilon) \subset TB(x_0, r) \subset T(W).$$

这就说明 $y_0 = Tx_0$ 是 $T(W)$ 的内点.

(2) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 始终存在 $\delta > 0$, 使得 $T\overline{B}(0, \varepsilon)$ 在 $U(0, \varepsilon\delta)$ 中稠密, 即就是

$$\overline{T\overline{B}(0, \varepsilon)} \supset U(0, \varepsilon\delta).$$

因为 $X = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \overline{B}(0, k)$, 所以

$$Y = TX = \bigcup_{k=1}^{+\infty} T\overline{B}(0, k).$$

由于 Y 是 Banach 空间, 由 Baire 纲定理, Y 是第二类型集. 因此, 存在自然数 k_0, 使得 $\overline{T\overline{B}(0, k_0)}$ 至少含有一个内点. 从而, 存在开球 $U(y_0, r_0) \subset \overline{T\overline{B}(0, k_0)}$. 取 $\delta = r_0/k_0$. 对任意给定的 $y \in U(0, \varepsilon\delta)$, 就有 $y_0 \pm \frac{k_0}{\varepsilon} y \subset U(y_0, r_0)$. 因此, 存在 $\overline{B}(0, k_0)$ 中的点列 (因 $U(y_0, r_0) \subset \overline{T\overline{B}(0, k_0)}$) $\{x_k\}$ 及 $\{x'_k\}$, 使得

$$Tx_k \longrightarrow y_0 - \frac{k_0}{\varepsilon} y, \quad Tx'_k \longrightarrow y_0 + \frac{k_0}{\varepsilon} y \, (k \to +\infty).$$

从而, $T(\frac{\varepsilon}{2k_0}(x'_k - x_k)) \to y \, (k \to +\infty)$. 显然 $\frac{\varepsilon}{2k_0}(x'_k - x_k) \in \overline{B}(0, \varepsilon) \, (k = 1, 2, \cdots)$, 故 $T\overline{B}(0, \varepsilon)$ 在 $U(0, \varepsilon\delta)$ 中稠密.

(3) $TB(0, 1) \supset U(0, \delta)$. 由 (2) 的证明可知, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 始终存在 $\delta > 0$, 使得 $T\overline{B}(0, \varepsilon)$ 在 $U(0, 3\varepsilon\delta)$ 中稠密 (δ 是 (2) 中 δ 的 $\frac{1}{3}$, 取得更小一点也可以).

对任意的 $y_0 \in U(0, \delta)$, 要证明可以找到 $x_0 \in B(0, 1)$, 使得 $Tx_0 = y_0$, 也就是求方程 $Tx = y_0$ 在 $B(0, 1)$ 内的一个解 x_0, 我们用逐次逼近法. 对 $y_0 \in U(0, \delta)$, 由于 $T\overline{B}(0, 1/3)$ 在 $U(0, \delta)$ 中稠密, 因此, 存在 $x_1 \in \overline{B}(0, 1/3)$, 使得 $\|y_0 - Tx_1\| < \delta/3$. 这意味着, $y_1 = y_0 - Tx_1 \in U(0, \delta/3)$. 由于 $T\overline{B}(0, 1/3^2)$ 在 $U(0, \delta/3)$ 中稠密, 因而, 存在 $x_2 \in \overline{B}(0, 1/3^2)$, 使得 $\|y_1 - Tx_2\| < \delta/3^2$. 但是

$$y_2 = y_1 - Tx_2 = y_0 - T(x_1 + x_2) \in U\left(0, \frac{\delta}{3^2}\right).$$

…………

对于 $y_n = y_{n-1} - Tx_n \in U(0,\delta/3^n)$，存在 $x_{n+1} \in \overline{B}(0,1/3^{n+1})$，使得 $\|y_n - Tx_{n+1}\| < \delta/3^{n+1}$. 这样一直继续下去可以得到点列 $\{x_n\}$，$x_n \in B(0,\delta/3^n)\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$，使得

$$\|y_0 - T(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\| < \frac{\delta}{3^n}.$$

因为 X 是 Banach 空间及

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}.$$

所以，存在 $x_0 \in X$，使得 $x_0 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$，而且 $\|x_0\| < 1$. 这样 $x_0 \in B(0,1)$. 于是，由 T 的连续性，我们有

$$y_0 = \lim_{n\to+\infty} T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = Tx_0.$$

即就得到 $U(0,\delta) \subset TB(0,1)$.

定理 5.32 (Banach 逆算子定理) 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 Y 上一一对应的有界线性算子，则 T 的逆算子 T^{-1} 是有界线性算子.

证明 根据定理的条件，逆算子 T^{-1} 存在并且是线性算子. 由定理 5.31 证明的第三步知存在 $\delta > 0$ 使得 $TB(0,1) \supset U(0,\delta)$，因此，对任意的 $y \in U(0,\delta)$，有 $T^{-1}y \in B(0,1)$. 对任意的 $z \in Y$，$z \ne 0$，有 $\delta z/(4\|z\|) \in U(0,\delta)$，所以 $T^{-1}(\delta z/(4\|z\|)) \in B(0,1)$，即 $\|T^{-1}(\delta z/(4\|z\|))\| \le 1$，从而

$$\|T^{-1}z\| \le \frac{4}{\delta}\|z\|. \tag{5.6.2}$$

上式显然当 $z = 0$ 时也成立，故对于任意的 $z \in Y$，有

$$\|T^{-1}z\| \le \frac{4}{\delta}\|z\|.$$

这就说明了 T^{-1} 是有界线性算子.

定理 5.33 (等价范数定理) 设线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$ 及 $\|\cdot\|_2$ 都使得 X 成为 Banach 空间，并且存在常数 C，使得对于任意的 $x \in X$ 有

$$\|x\|_2 \le C\|x\|_1,$$

则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

证明　设 I 是 X 上的恒等算子，由给定的条件知，I 是 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|_1)$ 上到 Banach 空间 $(X,\|\cdot\|_2)$ 上一一对应的有界线性算子. 由 Banach 逆算子定理知，存在常数 C_1，使得对于任意的 $x\in X$ 有 $\|x\|_1\le C_1\|x\|_2$. 故 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

设 $(X,\|\cdot\|_X)$，$(Y,\|\cdot\|_Y)$ 是同一数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间，在直积集

$$X\times Y=\{(x,\ y):\quad x\in X,\ y\in Y\}$$

上按坐标定义线性运算，即就是对于任意的 x_1、$x_2\in X$，y_1，$y_2\in Y$，有下述加法运算：

$$(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2):=(x_1+x_2,\ y_1+y_2),$$

对任意的 $\alpha\in\mathbf{F}$，$x\in X$，$y\in Y$，有下述标量乘法运算：

$$\alpha(x,\ y):=(\alpha x,\ \alpha y).$$

显然，这时 $X\times Y$ 是一个线性空间. 如果 $z\in X\times Y$，$z=(x,y)$，$x\in X$，$y\in Y$，$1\le p<+\infty$. 定义

$$\|z\|_p:=(\|x\|_X^p+\|y\|_Y^p)^{1/p},\qquad \|z\|_\infty:=\max\{\|x\|_X,\ \|y\|_Y\},$$

这里 $\|\cdot\|_X$，$\|\cdot\|_Y$ 分别表示 X 和 Y 上的范数. 可以证明这些都是 $X\times Y$ 上的等价范数. $X\times Y$ 在以上范数下成为赋范线性空间，称为 X 与 Y 的**乘积空间**. 设 $\{(x_n,y_n)\}$，$(x,y)\subset X\times Y$，则 $(x_n,y_n)\longrightarrow(x,y)\,(n\to+\infty)\Longleftrightarrow x_n\longrightarrow x,\ \ y_n\longrightarrow y\,(n\to+\infty)$. 因此，$\{(x_n,y_n)\}$ 是 $X\times Y$ 中的基本点列，当且仅当 $\{x_n\}$ 是 X 中的基本点列，而且 $\{y_n\}$ 是 Y 中的基本点列. 如果 X 及 Y 都是 Banach 空间，则 $X\times Y$ 也是 Banach 空间.

有时直接说明一个线性算子的连续性比较困难，我们可以转而证明它的图像是闭的，从而由闭图像定理得知算子的连续性. 这正是下面将要讨论的内容. 此外，在工程应用中遇到的很多线性算子是无界的，在这种情况下考察线性算子的定义域显得非常重要. 例如 Hilbert 空间 $L^2([0,1])$ 上的求导算子 $T=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 我们可以取 $D(T)=C^1([0,1])$ 或 $D(T)=C^2([0,1])$，同函数的情况类似，尽管算子在两个定义域上的作用是同样的，但它们是两个不同的算子，其中一个是另外一个的限制.

定义 5.34　设 T_1 和 T_2 是从赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的两个线性算子，如果 $D(T_1)\supset D(T_2)$，并且对于任意的 $x\in D(T_2)$ 有 $T_1x=T_2x$，

那么称**算子 T_1 和 T_2 相等**，记为 $T_1 = T_2$. 如果 $D(T_1) \subset D(T_2)$，并且对于任意的 $x \in D(T_1)$ 有 $T_1 x = T_2 x$. 那么称**算子 T_1 是 T_2 的限制**，或者等价地说**算子 T_2 是 T_1 的扩张**．记作 $T_1 \subset T_2$. 定义两个算子 T_1 和 T_2 的加法算子为：$D(T_1 + T_2) := D(T_1) \cap D(T_2)$，并且对于任意的 $x \in D(T_1 + T_2)$ 有 $(T_1 + T_2)x := T_1 x + T_2 x$.

设 T_1 是从赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子，T_2 是从赋范线性空间 Y 到赋范线性空间 Z 的线性算子，那么两个算子 T_1 和 T_2 的**复合算子**定义为：$D(T_2 T_1) = \{x \in D(T_1):\ T_1 x \in D(T_2)\}$，并且对于任意的 $x \in D(T_2 T_1)$ 有：$T_2 T_1 x = T_2(T_1 x)$.

例 5.35　设 $X = Y = L^2([0,1])$. T_1 定义为下面的线性算子：

$$D(T_1) = C^1([0,1]),\qquad T_1 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\qquad \forall f \in D(T_1).$$

恒等算子 I 定义为

$$D(I) = L^2([0,1]),\qquad I(f) = f,\qquad \forall f \in D(I).$$

令 $T_2 = I - T_1$. 根据定义有

$$D(T_2) = D(T_1) \cap D(I) = C^1([0,1]),\quad T_2 f = f - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\quad \forall f \in C^1([0,1]).$$

考察算子 $T_1 + T_2$. 根据定义，则有

$$D(T_1 + T_2) = D(T_1) \cap D(T_2) = C^1([0,1]) \subset L^2([0,1]),$$

$$(T_1 + T_2)f = T_1 f + T_2 f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \left(f - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right) = f,\qquad \forall f \in C^1([0,1]).$$

因此，$T_1 + T_2 \subset I$，而且 $T_1 + T_2 \neq I$.

例 5.36　设 $X = L^2([0,1])$. 考虑从 X 到 X 中的两个算子 ∂ 和 M，它们分别定义如下

$$D(\partial) = C^1([0,1]),\qquad \partial f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t},\qquad \forall f \in D(\partial),$$

$$D(M) = X,\qquad (Mf)(t) = t f(t),\qquad \forall f \in D(M).$$

因为

$$\|Mf\|^2 = \int_0^1 |t f(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \|f\|^2,$$

所以 M 是有界线性算子. 显然, $D(\partial M) = D(M\partial) = C^1([0,1])$. ∂ 和 M 的交换子定义为

$$[\partial, M] = \partial M - M\partial, \qquad D([\partial, M]) = C^1([0,1]).$$

由于

$$[\partial, M]f(t) = (\partial M - M\partial)f(t) = \partial(tf(t)) - t(\partial f(t)) = f(t),\ \forall f \in D([\partial, M]),$$

因此, $[\partial, M] \subset I$, 此关系称为 Heisenberg 不确定关系.

注 对于两个算子 A 和 B 来说, 若 $[A, B] \subset 0$, 则 A 和 B 可以交换.

定义 5.37 设 X, Y 是赋范线性空间, T 是 X 中到 Y 中的线性算子, 考虑乘积赋范线性空间 $X \times Y$ 中的集合:

$$G(T) := \{(x, Tx) \in X \times Y : \quad x \in D(T)\},$$

称 $G(T)$ 为算子 T 的 **图像**. 如果 $G(T)$ 是乘积赋范线性空间 $X \times Y$ 中的闭集, 则称 T 是 **闭算子**.

定理 5.38 (判别定理) 设 X, Y 是赋范线性空间, T 是 X 中到 Y 中的线性算子, 则 T 是闭算子, 当且仅当对于任意的点列 $\{x_n\} \subset D(T)$, 如果 $x_n \longrightarrow x \in X$, $Tx_n \longrightarrow y \in Y\ (n \to +\infty)$, 那么必定可以推出 $x \in D(T)$ 而且 $y = Tx$.

证明 充分性的证明. 要证 T 是闭算子, 即要证明 $\overline{G(T)} = G(T)$, 从而只要证明 $\overline{G(T)} \subset G(T)$. 设 $(x, y) \in \overline{G(T)}$, 则存在 $\{x_n\} \subset D(T)$, 使得 $(x_n, Tx_n) \longrightarrow (x, y)\ (n \to +\infty)$. 于是,

$$\|(x_n - x, Tx_n - y)\| = \|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \longrightarrow 0\ (n \to +\infty).$$

从而, $x_n \longrightarrow x$, $Tx_n \longrightarrow y\ (n \to +\infty)$. 因此, $x \in D(T)$ 而且 $Tx = y$. 故 $(x, y) \in G(T)$, 这就说明 T 是闭算子.

必要性的证明. 设 $\{x_n\} \subset D(T)$, 而且 $x_n \longrightarrow x\ (n \to +\infty)$ 以及 $Tx_n \longrightarrow y\ (n \to +\infty)$. 于是, $(x_n, Tx_n) \longrightarrow (x, y)\ (n \to +\infty)$. 如果 $G(T)$ 是闭集, 则 $(x, y) \in G(T)$, 此即说明 $x \in D(T)$ 而且 $Tx = y$.

定理 5.39 (闭图像定理) 设 T 是 Banach 空间 X 上到 Banach 空间 Y 中的闭线性算子, 则 T 是有界线性算子.

证明 因为 X, Y 都是 Banach 空间, 所以乘积赋范线性空间 $X \times Y$ 也是 Banach 空间. 当 T 是线性算子时, $G(T)$ 是 $X \times Y$ 的线性子空间. 由

于 $G(T)$ 是 $X \times Y$ 中的闭集, 从而 $G(T)$ 也是 Banach 空间. 定义从 $G(T)$ 上到 Y 中的算子 P

$$P(x, Tx) = x, \qquad \forall (x, Tx) \in G(T).$$

显然, P 是 $G(T)$ 上到 X 上[illegible]对应的线性算子, 而且

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \le \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|_1.$$

因此, P 是有界线性算子. 由 Banach 逆算子定理知道, P^{-1} 有界, 这意味着

$$\|(x, Tx)\|_1 = \|P^{-1}x\|_1 \le \|P^{-1}\| \|x\|, \quad \forall x \in X$$

故 $\|Tx\| \le \|(x, Tx)\|_1 \le \|P^{-1}\| \|x\|$. 这已说明 T 是有界线性算子.

例 5.40 (闭线性算子不一定有界) 在 $C([0,1])$ 上, 算子

$$D(T) = C^1([0,1]), \qquad T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},$$

是一个闭线性算子但它不是有界的.

证明 如果 $x_n(t) \in C^1([0,1])$, 并且有 $x_n \longrightarrow x\,(n \to +\infty)$ (在 $C([0,1])$ 中), $\dfrac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t} \longrightarrow y\,(n \to +\infty)$ (在 $C([0,1])$ 中), 则有

$$x_n(t) - x_n(0) = \int_0^t x_n'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \longrightarrow \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,(n \to +\infty),$$

但是 $x_n(t) - x_n(0) \longrightarrow x(t) - x(0)\,(n \to +\infty)$, 所以,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

因而 $Tx = x' = y$, 故 T 是闭线性算子, 但它不是有界的. 取 $\phi_n(t) = \sin(n\pi t)$, $\|\phi_n\| = 1$, 但是

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_n(t) \right\| = n\pi \|\cos(n\pi t)\| = n\pi \longrightarrow +\infty\,(n \to +\infty).$$

这说明 T 不是有界的.

定义 5.41 设 X, Y 是 Banach 空间, $T: X \supset D(T) \to Y$ 是线性算子, 若 $G(T)$ 在 $X \times Y$ 中的闭包 $\overline{G(T)}$ 是某个线性算子 T 的图像, 也

就是，$G(\overline{T})=\overline{G(T)}$，我们就说 T 是**可闭的**，或者说 T 有**闭扩张**. 若 $\overline{T}$ 存在，由于 $G(T)\subset G(\overline{T})$，$T\subset\overline{T}$，因此，它被称为 T 的**闭包**.

定理 5.42 线性算子 T 是可闭的，当且仅当 $\{(0,y):\ y\neq 0\}\bigcap\overline{G(T)}=\emptyset$.

证明 假设 T 是可闭的，则 $\overline{G(T)}=G(\overline{T})$. 由于 $0\in D(T)\subset D(\overline{T})$，因此，$\overline{T}0=0$，所以，对任意的 $y\neq 0$，一定有 $(0,y)\notin G(\overline{T})=\overline{G(T)}$.

另一方面，若 T 不是可闭的，则 $\overline{G(T)}$ 不是一个图像，这就意味着存在 x，y_1，y_2，$y_1\neq y_2$，使得 (x,y_1)，$(x,y_2)\in\overline{G(T)}$，但因 $\overline{G(T)}$ 是 $X\times Y$ 的线性子空间，因此，$(0,y_1-y_2)\in\overline{G(T)}$，而且 $y_1\neq y_2$.

例 5.43 考虑 $L^2([0,1])$ 中的微分算子 $\partial=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 设 $D(\partial)=C^1([0,1])\subset L^2([0,1])$. 很明显 $\partial:\ D(\partial)\to C([0,1])\subset L^2([0,1])$ 是线性算子. 下面说明 ∂ 是无界算子，取 $D(\partial)$ 中的点列 $\{f_n\}$，$f_n(t)=\frac{1}{n}\sin(2n\pi t)$，从而 $\partial f_n(t)=2\pi\cos(2n\pi t)$，而且

$$\begin{aligned}\|\partial f_n\|_2^2 &= 4\pi^2\int_0^1\cos^2(2n\pi t)\,\mathrm{d}t=4\pi^2\int_0^1\sin^2(2n\pi t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\pi^2\left(\int_0^1[\sin^2(2n\pi t)+\cos^2(2n\pi t)]\,\mathrm{d}t\right)=2\pi^2.\end{aligned}$$

但是，由于

$$\|f_n\|_2^2=\frac{1}{n^2}\int_0^1\sin^2(2n\pi t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2n^2},$$

所以在 $L^2([0,1])$ 中 $f_n\to 0$，而 $\partial f_n\not\to 0$，这就说明 ∂ 是无界算子.

下面说明 ∂，$D(\partial)=C^1([0,1])$ 是可闭的. 假设点列 $\{g_n\}\subset D(\partial)$ 在 $L^2([0,1])$ 中使得 $g_n\to 0$，$\partial g_n\to g$，我们将推出 $g=0$.

因为内积是连续的，因此

$$\langle\partial g_n,\varphi\rangle\to\langle g,\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in C_0^\infty([0,1]),$$

而且

$$\begin{aligned}\langle\partial g_n,\varphi\rangle &= \int_0^1\partial g_n(t)\,\overline{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t=0-\int_0^1 g_n(t)\,\overline{\partial\varphi(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= -\langle g_n,\partial\varphi(t)\rangle\to-\langle 0,\partial\varphi(t)\rangle=0.\end{aligned}$$

由此可知，对任意的 $\varphi\in C_0^\infty([0,1])$，$\langle g,\varphi\rangle=0$，这就意味着 $g\in C_0^\infty([0,1])^\perp$，但是 $C_0^\infty([0,1])$ 在 $L^2([0,1])$ 中是稠密的，即就是说 $C_0^\infty([0,1])^\perp=L^2([0,1])^\perp=\{0\}$，故 $g=0$.

这就表明对于 $D(\partial)=C^1([0,1])$ 来说，∂ 是可闭的，闭包算子为 $\overline{\partial}$. 它的定义域是广义可导函数构成的空间 $D(\overline{\partial})\subset L^2([0,1])$. 更确切地说，$D(\overline{\partial})$ 是由 $L^2([0,1])$ 中满足如下条件的 f 构成：存在收敛点列 $\{f_n\}\subset C^1([0,1])$，在 $L^2([0,1])$ 中满足 $f_n\to f$ 和 $\{\partial f_n\}$ 是 $L^2([0,1])$ 中的收敛点列，而且 $\overline{\partial}f=\lim\limits_n \partial f_n$. $D(\overline{\partial})$ 正是通常的 Sobolev 空间 $H^1([0,1])$. 这个空间在应用中是很重要的.

定理 5.44（一致有界原理） 设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间，$W\subset B(X,Y)$. 如果对于任意的 $x\in X$, $\sup\{\|Tx\|:\ T\in W\}=M(x)<+\infty$, 则

$$\sup\{\|T\|:\ T\in W\}<+\infty,$$

等价地说 $\{\|T\|:\ T\in W\}$ 为有界集.

对每一个 $x\in X$, $\{Tx:\ T\in W\}$ 是算子族 W 在点 x 的轨道，因此一致有界原理是说，如果 Banach 空间 X 上的有界线性算子族 W 在每一点 $x\in X$ 轨道有界，则算子族一致有界，即存在常数 $M>0$，使得 $\|T\|\le M\ (\forall\ T\in W)$.

一致有界原理的证明 对任意的 $x\in X$，设 $p(x)=\sup\limits_{T\in W}\|Tx\|$，并且对每一个自然数 k，令

$$M_k=\{x\in X:\ p(x)\le k\}=\bigcap_{T\in W}\{x\in X:\ \|Tx\|\le k\}.$$

因为每一个 $T\in W$ 是有界线性算子，所以 $\|Tx\|$ 是 x 的连续函数. 因此，对于每一个 $T\in W$, $\{x\in X:\ \|Tx\|\le k\}$ 是 X 中的闭集，从而每一个 M_k 是闭集. 由给定的条件可知

$$X=\bigcup_{k=1}^{+\infty}M_k.$$

因为 X 是 Banach 空间，由 Baire 纲定理，X 是第二类型集. 因此，一定存在 k_0，使得 M_{k_0} 在某个闭球 $\overline{B}(x_0,r_0)=\{x\in X:\ \|x-x_0\|\le r_0\}$ 中稠密，所以，$\overline{B}(x_0,r_0)\subset\overline{M_{k_0}}=M_{k_0}$. 任取 $x\in X$, $x\ne 0$，则 $x_0\pm r_0x/\|x\|\in\overline{B}(x_0,r_0)$. 于是

$$\begin{aligned}p\left(\frac{2r_0x}{\|x\|}\right)&=p\left(x_0+\frac{x}{\|x\|}r_0-x_0+\frac{x}{\|x\|}r_0\right)\\&\le p\left(x_0+\frac{x}{\|x\|}r_0\right)+p\left(\frac{x}{\|x\|}r_0-x_0\right)\le 2k_0.\end{aligned}$$

因此，$p(x) \leq \frac{k_0}{r_0}\|x\|\,(x \in X)$. 这意味着对于每一个 $T \in W$，$\|T\| \leq \frac{k_0}{r_0}$.

定理 5.45 设 X 和 Y 都是 Banach 空间，算子点列 $\{T_n\} \subset B(X,Y)$. 若对每个 $x \in X$，$\{T_n x\}$ 有界，则数列 $\{\|T_n\|\}$ 是有界的.

定理 5.46 设 X 和 Y 都是 Banach 空间，算子点列 $\{T_n\} \subset B(X,Y)$. 若 $\sup\limits_n \|T_n\| = +\infty$，则一定存在 $x_0 \in X$ 满足 $\sup\limits_n \|T_n x_0\| = +\infty$.

定理 5.47 (Banach-Steinhaus 定理) 设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范线性空间. 若 $T_n\,(n = 1, 2, \cdots), T \in B(X,Y)$，$M$ 是 X 的某个稠密子集，则对任意的 $x \in X$ 都有 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n x = Tx$ 的充分必要条件是

(1) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(2) 对于任意的 $x \in M$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n x = Tx$.

证明 必要性的证明. 对任意的 $x \in X$，令 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n x = Tx$. 由假设 $T:\ X \longrightarrow Y$ 有定义，并且是线性算子. 由于收敛序列是有界的，即对于任意的 $x \in X$，有

$$\sup\{\|T_n x\|:\ n \in \mathbf{N}\} = M(x) < +\infty.$$

由一致有界原理，$\sup\{\|T_n\|:\ n \in \mathbf{N}\} < +\infty$，即就是 $\{\|T_n\|\}$ 有界.

充分性的证明. 设 $\|T_n\| \leq C\ (\forall n \in \mathbf{N})$. 对于任意的 $x \in X$ 及 $\varepsilon > 0$，取 $y \in M$，使得

$$\|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{4(\|T\| + C)}.$$

从而，就有

$$\begin{aligned} \|T_n x - Tx\| &\leq \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - Ty\| + \|Tx - Ty\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \|T_n y - Ty\|. \end{aligned}$$

只要取 N 足够大，使得对于任意的 $n \geq N$，恒有 $\|T_n y - Ty\| < \varepsilon/2$. 因此，对于任意的自然数 $n \geq N$，有 $\|T_n x - Tx\| < \varepsilon$.

现在可以进一步研究算子列的强收敛. 回顾一下强收敛的定义，设 T，$T_n \in B(X,Y)\,(n = 1, 2, \cdots)$，若对每一个 $x \in X$ 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$，则称 $\{T_n\}$**强收敛**于 T.

关于算子列的强收敛，主要问题是

(1) 强收敛的算子列是否一致有界？算子列满足那些条件时是强收敛的？

(2) $B(X,Y)$ 在算子列强收敛的意义下是否完备？就是说，若对每一个 $x\in X$，$\{T_n x\}$ 是 Y 中的基本点列，是否存在 $T\in B(X,Y)$，使得 $\{T_n\}$ 强收敛于 T?

对于第一个问题的回答正是前面的 Banach-Steinhaus 定理. 下面的定理是对第二个问题的回答.

定理 5.48 设 X，Y 都是 Banach 空间，则 $B(X,Y)$ 在算子列强收敛意义下是完备的.

证明 设 $\{T_n\}\subset B(X,Y)\,(n=1,2,\cdots)$ 是一有界线性算子列，对于每个 $x\in X$，$\{T_n x\}$ 是 Y 中的基本点列，我们证明 $\{T_n\}$ 强收敛.

因为 $\{T_n x\}$ 是基本点列，故 $\{T_n x\}$ 有界，由一致有界原理可知 $\{T_n\}$ 一致有界. 由于 Y 是 Banach 空间，故对每个 $x\in X$，$\{T_n x\}$ 在 Y 中收敛. 于是 $\{T_n\}$ 满足 Banach-Steinhaus 定理中的条件，故 $\{T_n\}$ 强收敛于某一有界线性算子 $T\in B(X,Y)$，这表明 $B(X,Y)$ 在算子列强收敛意义下完备.

§5.7 Riesz 表示定理

让我们回顾线性泛函的概念.

定义 5.49 设 X 是数域 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间，线性算子 $f:\ X\to\mathbf{F}$ 称为**线性泛函**. 对于 $x\in X$，f 在 x 点的值表示为 $f(x)$ 或 $\langle f,x\rangle$.

注 线性泛函 $f:\ X\to\mathbf{F}$ 的线性意味着：对于任意的 $\alpha,\beta\in\mathbf{F}$，$x$，$y\in X$，有

$$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y).$$

f 的有界性是指

$$\|f\|=\sup_{x\neq 0}\frac{|\langle f,x\rangle|}{\|x\|}<+\infty.$$

因此，当 f 有界时，我们就一定有 $|\langle f,x\rangle|\le\|f\|\cdot\|x\|$.

定理 5.50 (Riesz 表示定理) 若 $f:\ H\longrightarrow\mathbf{F}$ 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性泛函，则存在唯一的 $x_0\in H$，使得对任意的 $x\in H$，$f(x)=(x,x_0)$，并且有 $\|f\|=\|x_0\|$.

证明 令 $M=\ker f$. M 是 H 的闭线性子空间. 如果 $M=H$，则 $f=0$，即 f 是零泛函，此时只要取 $x_0=0$ 就可以了. 现假设 $M\neq H$，由正交分解定理 $M^{\perp}\neq\{0\}$，因此，存在 $x_1\in M^{\perp}$，$x_1\neq 0$. 这样就有 $x_1\notin M$，而且 $f(x_1)\neq 0$. 取 $x_2=x_1/f(x_1)$，则 $x_2\in M^{\perp}$，$f(x_2)=1$. 对于任意的

$x \in H$, 就有

$$f(x - f(x)x_2) = f(x) - f(x)f(x_2) = 0.$$

所以, $x - f(x)x_2 \in M$, 而且

$$0 = \langle x - f(x)x_2, x_2\rangle = \langle x, x_2\rangle - f(x)\|x_2\|^2.$$

因此, $f(x) = \langle x, x_2/\|x_2\|^2\rangle$. 令 $x_0 = x_2/\|x_2\|^2$, 则对于任意的 $x \in H$, 有 $f(x) = \langle x, x_0\rangle$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式, $|f(x)| \leq \|x_0\|\|x\|$, 故 $\|f\| \leq \|x_0\|$. 又因

$$f(x_0/\|x_0\|) = \left\langle \frac{x_0}{\|x_0\|}, x_0 \right\rangle = \|x_0\|,$$

故 $\|f\| \geq \|x_0\|$. 因而 $\|f\| = \|x_0\|$.

最后证明 x_0 的唯一性. 如果还有另一个 $x_0' \in H$, 使得对于任意的 $x \in H$, $f(x) = \langle x, x_0'\rangle$, 则 $\langle x, x_0\rangle = \langle x, x_0'\rangle$, 也就是 $\langle x, x_0 - x_0'\rangle = 0$. 由 x 的任意性, 特别地取 $x = x_0 - x_0'$, 就会得到 $\langle x_0 - x_0', x_0 - x_0'\rangle = 0$, 从而 $x_0 - x_0' = 0$, 故 $x_0 = x_0'$.

推论 5.51

(1) 如果 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界线性泛函, 则存在 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, 使得对于任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $f(x) = \langle x, \alpha\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$.

(2) 如果 f 是 $\mathbf{C}^n$ 上的有界线性泛函, 则存在 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{C}^n$, 使得对于任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{C}^n$, $f(x) = \langle x, \alpha\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k} x_k$.

推论 5.52

(1) 如果 F 是实 $L^2(\Omega)$ 上的有界线性泛函, 则存在唯一的 $g \in L^2(\Omega)$, 使得对于任意的 $f \in L^2(\Omega)$, 有

$$F(f) = \langle f, g\rangle = \int_\Omega f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

(2) 如果 F 是复 $L^2(\Omega)$ 上的有界线性泛函, 则存在唯一的 $g \in L^2(\Omega)$, 使得对于任意的 $f \in L^2(\Omega)$, 有

$$F(f) = \langle f, g\rangle = \int_\Omega f(t)\, \overline{g(t)}\, \mathrm{d}t.$$

定理 5.53(Lax-Milgram)　设 X 是实 Hilbert 空间，$a(\cdot,\cdot)$ 是定义在乘积空间 $X \times X$ 上的泛函，满足下述条件：

(1) $a(x,y)$ 关于 x 和 y 是线性的；

(2) 存在常数 $c_1 > 0$，使得对于任意的 $x,y \in X$，有 $|a(x,y)| \leq c_1\|x\|\|y\|$；

(3) 存在常数 c_2，使得对于任意的 $x \in X$，有 $a(x,x) \geq c_2\|x\|$.

则存在唯一的有界线性算子 T，它具有有界线性逆算子 T^{-1} 并且满足：$\langle x,y\rangle = a(x,Ty)$，$\|T\| < 1/c_2$ 和 $\langle x,T^{-1}y\rangle = a(x,y)$，而且 $\|T^{-1}\| < c_1$.

§5.8　Hahn-Banach 定理

利用 Riesz 表示定理来证明 Hilbert 空间上的 Hahn-Banach 定理.

定理 5.54 (Hahn-Banach 定理)　设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间，若 f 是定义在 M 上的连续线性泛函，则存在 H 上的连续线性泛函 F 满足下述条件：

(1) 对任意的 $x \in M$，$\langle F,x\rangle = \langle f,x\rangle$；

(2) $\|F\|_H = \|f\|_M$.

证明　由 Riesz 表示定理知存在唯一的 $y \in M$，使得对于任意的 $x \in M$，有

$$f(x) = \langle f,x\rangle = \langle x,y\rangle.$$

设 P 是由 H 到 M 上的正交投影. 对于任意的 $x \in H$，定义泛函

$$F(x) = \langle F,x\rangle = \langle Px,y\rangle = f(Px).$$

对于任一 $x \in M$，因为 $Px = x$，因此

$$F(x) = \langle F,x\rangle = \langle x,y\rangle = f(x).$$

另一方面，显然有 $\|f\|_M \leq \|F\|_H$. 因为对于任意的 $x \in H$，$\|Px\| \leq \|x\|$，则有

$$|F(x)| = |f(Px)| \leq \|f\|_M\|Px\| \leq \|f\|_M\|x\|,$$

这就说明 $\|F\|_H \leq \|f\|_M$. 因此，$\|F\|_M = \|f\|_M$.

定理 5.55 (实线性空间上的 Hahn-Banach 定理)　设 M 是实线性空间 X 的线性子空间, $p:\ X\to\mathbf{R}$ 是次线性泛函, 这意味着对于任意的 $x,y\in X$ 和 $\alpha\geq 0$, p 满足

$$p(x+y)\leq p(x)+p(y),\quad p(\alpha x)=\alpha p(x).$$

如果 f 是 M 上的线性泛函并且对于任意的 $x\in M$ 满足 $f(x)\leq p(x)$, 则存在 X 上的线性泛函 F, 使得

(1) 控制条件:　$F(x)\leq p(x),\ \forall x\in M$;

(2) 延拓条件:　$F(x)=f(x),\ \forall x\in M$.

定理 5.56 (Hahn-Banach 定理)　设 M 是赋范线性空间 X 的子空间, f 是定义在 M 上的有界线性泛函. 则 f 可以保持范数不变延拓到全空间 X 上, 这意味着存在 X 上的有界线性泛函 F, 满足下述条件:

(1) $F(x)=f(x),\ \forall x\in M$;

(2) $\|F\|=\|f\|_M$, 这里 $\|f\|_M$ 表示 f 作为 M 上的有界线性泛函的范数.

证明　分两种情况来证明.

(1)　当 X 是实赋范线性空间时. 令 $p(x)=\|f\|_M\|x\|(\forall x\in X)$, 则 $p(x)$ 是 X 上的次线性泛函, 且 $f(x)\leq p(x)(\forall x\in X)$. 因此, 存在 X 上的线性泛函 F, 使得 $F|_M=f$, 且 $F(x)\leq p(x)=\|f\|_M\|x\|(\forall x\in X)$. 再因为

$$-F(x)=F(-x)\leq p(-x)=p(x).$$

从而有

$$|F(x)|\leq p(x)=\|f\|_M\|x\|,\qquad \forall x\in X.$$

于是, F 是有界线性泛函且 $\|F\|\leq\|f\|_M$. 另一方面, 显然 $\|F\|\geq\|f\|_M$. 因此, $\|F\|=\|f\|_M$.

(2)　当 X 是复赋范线性空间时. 对于任意的 $x\in M$, 设 $f(x)=\phi(x)+\mathrm{i}\,\psi(x)$, 其中 ϕ, ψ 分别表示 f 的实部与虚部. 由于

$$\mathrm{i}\,(\phi(x)+\mathrm{i}\,\psi(x))=f(\mathrm{i}\,x)=\phi(\mathrm{i}\,x)+\mathrm{i}\,\psi(\mathrm{i}\,x),$$

所以 $\phi(\mathrm{i}\,x)=-\psi(x)$, 同时也有

$$|\phi(x)|\leq|f(x)|\leq\|f\|_M\|x\|,\qquad \forall x\in M.$$

因此，若将 X 看成实赋范线性空间，则 ϕ 是实赋范线性空间 M 上的实有界线性泛函 (注 所谓实线性是指除可加性之外对任何实数 α，有 $\phi(\alpha x)=\alpha\phi(x)$). 对于任意的 $x\in X$，令 $p(x)=\|f\|_M\|x\|$，则对于任意的 $x,y\in X$ 及 $\alpha\geq 0$ 有

$$p(x+y)\leq p(x)+p(y),\qquad p(\alpha x)=\alpha p(x),$$

并且当 $x\in M$ 时，有

$$\phi(x)\leq|f(x)|\leq\|f\|_M\|x\|=p(x).$$

于是由定理 5.55，ϕ 可以延拓成 X 上的实线性泛函 ϕ_0，而且 $\phi_0(x)\leq p(x)$. 现在令

$$F(x)=\phi_0(x)-\mathrm{i}\phi_0(\mathrm{i}x),\qquad x\in X.$$

我们证明 F 就是满足定理中要求的泛函，并且对任意的 $x\in X$，有

$$\begin{aligned}F(\mathrm{i}x)&=\phi_0(\mathrm{i}x)-\mathrm{i}\phi_0(-x)=\phi_0(\mathrm{i}x)+\mathrm{i}\phi_0(x)\\&=\mathrm{i}(\phi_0(x)-\mathrm{i}\phi_0(\mathrm{i}x))=\mathrm{i}F(x).\end{aligned}$$

再由 ϕ_0 的实线性，对任意复数 $\alpha=\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2$，就有

$$\begin{aligned}F(\alpha x)&=F(\alpha_1x+\mathrm{i}\alpha_2x)=\alpha_1F(x)+\alpha_2F(\mathrm{i}x)\\&=\alpha_1F(x)+\mathrm{i}\alpha_2F(x)=\alpha F(x).\end{aligned}$$

F 的可加性是显然的，所以 F 是 X 上的线性泛函.

其次，对于任意的 $x\in M$，

$$F(x)=\phi_0(x)-\mathrm{i}\phi_0(\mathrm{i}x)=\phi(x)-\mathrm{i}\phi(\mathrm{i}x)=f(x),$$

所以 F 是 f 的延拓.

最后，我们证明 $\|F\|=\|f\|_M$. 记 $\theta=\arg F(x)$，于是

$$\begin{aligned}|F(x)|&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}F(x)=F(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)=\phi_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)-\mathrm{i}\phi_0(\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)\\&=\phi_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)\leq p(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}x)=\|f\|_M\|x\|,\end{aligned}$$

因此 $\|F\|\leq\|f\|_M$. 另一方面，显然有 $\|F\|\geq\|f\|_M$，故 $\|F\|=\|f\|_M$.

定理 5.57 (存在定理) 设 M 是赋范线性空间 X 的子空间, $x_0 \in X$. 如果

$$d := d(x_0, M) = \inf_{x \in M} \|x_0 - x\| > 0,$$

则存在 X 上的有界线性泛函 f, 使得

(1) $\|f\| = 1$, $f(x_0) = d$;

(2) 对于任意的 $x \in M$, 有 $f(x) = 0$.

证明 设 $\widetilde{M}$ 是由 x_0 及 M 张成的线性子空间, 即

$$\widetilde{M} = \{\alpha x_0 + x: \ \alpha \in \mathbf{F}, \ x \in M\}.$$

在 $\widetilde{M}$ 上定义泛函 g, 对 $\alpha x_0 + x \in \widetilde{M}$, 令 $g(\alpha x_0 + x) = \alpha d$. 显然 g 是 $\widetilde{M}$ 上的线性泛函, 而且 $g(x_0) = d$, 以及对于任意的 $x \in M$, $g(x) = 0$. 注意到当 $\alpha \neq 0$ 时, 有

$$\|\alpha x_0 + x\| = |\alpha| \left\| x_0 + \frac{x}{\alpha} \right\| = |\alpha| \left\| x_0 - \left(-\frac{x}{\alpha}\right) \right\| \geq |\alpha| d.$$

因此, 当 $\alpha \neq 0$ 时, 有

$$|g(\alpha x_0 + x)| = |\alpha d| \leq \|\alpha x_0 + x\|,$$

当 $\alpha = 0$ 时, 上式显然成立. 因此, g 有界且 $\|g\|_{\widetilde{M}} \leq 1$.

另一方面, 我们取 $x_n \in M$, $n = 1, 2, \cdots$, 使得 $\|x_n - x_0\| \longrightarrow d\,(n \to +\infty)$. 于是有

$$\|g\|_{\widetilde{M}} \|x_n - x_0\| \geq |g(x_n - x_0)| = |g(x_0)| = d,$$

故, 对于任意的自然数 n, 有

$$\|g\|_{\widetilde{M}} \geq \frac{d}{\|x_n - x_0\|}.$$

让 $n \to +\infty$, 就会得到 $\|g\|_{\widetilde{M}} \geq 1$, 所以 $\|g\|_{\widetilde{M}} = 1$.

由 Hahn- Banach 定理, g 可以保持范数不变延拓成 X 上的有界线性泛函 f, 因而 $f(x_0) = g(x_0) = d$, $\|f\|_X = \|g\|_{\widetilde{M}} = 1$, 并且对于任意的 $x \in M$, $f(x) = g(x) = 0$.

推论 5.58 设 X 是赋范线性空间, $X \neq \{0\}$, 则对任意的 $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$ 必存在 X 上的有界线性泛函 f, 使得

$$\|f\| = 1, \qquad f(x_0) = \|x_0\|.$$

证明 设 M 是由 $\{x_0\}$ 张成的线性子空间，即

$$M = \{\alpha x_0 : \ \alpha \in \mathbf{F}\}.$$

在 M 上定义泛函 f_0，$f_0(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| (\forall \alpha \in \mathbf{F})$，则 f_0 是 M 上的线性泛函，而且当 $x = \alpha x_0$ 时，有

$$|f_0(x)| = |f_0(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|,$$

所以 $\|f_0\|_M = 1$. 于是由 Hahn-Banach 定理知，f_0 可以延拓到整个 X 上并且保持范数不变，将延拓后的泛函仍记为 f. 它满足条件 $\|f\| = 1$ 及 $f(x_0) = \|x_0\|$.

注

(1) 对任何赋范线性空间 X，若 $X \neq \{0\}$，则 X 上必存在非零有界线性泛函.

(2) 设 X 是一个赋范线性空间，如果对于 X 上的所有有界线性泛函 f，有 $f(x_0) = 0$，则 $x_0 = 0$. 同时也有，对于任意的 $x, y \in X$，$x \neq y$，当且仅当存在 X 上的有界线性泛函 f，使得 $f(x) \neq f(y)$. 或等价地说就是，$x = y$，当且仅当对于 X 上的任意有界线性泛函 f，恒有 $f(x) = f(y)$. 此即说明若要证明抽象等式 $x = y$，则只要证明对于 X 上任意的有界线性泛函有数量等式 $f(x) = f(y)$.

推论 5.59 设 X 是赋范线性空间，$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 X 中线性无关的子集，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是任意给定的数，则存在 X 上的有界线性泛函 f，使得 $f(x_k) = \alpha_k$，$1 \leq k \leq n$.

证明 令 $M = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，定义 $g: M \longrightarrow \mathbf{F}$ 如下：

$$g\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \alpha_k.$$

由于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关，因此 g 的定义是有意义的. 显然 g 是 M 上的线性泛函. 因为 M 是有限维的，所以 g 在 M 上是有界的. 由 Hahn-Banach 延拓定理，令 f 是 g 在 X 上的保范线性延拓，这样就得到所要证明的结果.

注

(1) $x_0 \in \overline{M}$，当且仅当对 X 上任一满足 $f(x) = 0 (\forall x \in M)$ 的有界线性泛函 f，始终有 $f(x_0) = 0$.

(2) 设 $x_0 \in X$、A 是 X 的一个子集，则 x_0 可以用 A 中元素的线性组合以任意的精确度逼近，当且仅当对 X 上任一有界线性泛函 f，当 $f(x)=0\,(\forall x\in A)$ 时，始终有 $f(x_0)=0$. 等价地说，若令 $M=\text{span}\{A\}$，则 x_0 可以用形如 $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\,(x_k\in A,\ \alpha_k\in\mathbf{F},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n, n$ 为任一自然数) 的元以任意的精确度逼近的充分必要条件是 $x_0\in\overline{M}$，此时由 (1) 可以知 (2) 成立.

§5.9 对偶空间、自反空间

定义 5.60 设 $X\neq\{0\}$ 是 $\mathbf{F}$ 上的赋范线性空间，$X^*=B(X,\mathbf{F})$ 是 X 上有界线性泛函全体构成的集合，那么，按照有界线性泛函的线性运算及范数 X^* 成为赋范线性空间，它被称为 X 的 **对偶空间**. 由于 $\mathbf{F}$ 完备，故 X^* 也完备，因此，X^* 是一个 Banach 空间. 对于有界线性算子适用的结论，当然也适用于有界线性泛函. 实际上，设 f_1，f_2，$f\in X^*$，对于任意的 $x\in X$，有下面的加法和数乘定义：

$$(f_1+f_2)(x):=f_1(x)+f_2(x),\quad (\alpha f)(x):=\alpha f(x), \tag{5.9.1}$$

有界线性泛函的范数由下式给出：

$$\|f\|=\sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|}:\ x\neq 0,\quad x\in X\right\}. \tag{5.9.2}$$

类似地，由于 X^* 也是赋范线性空间 (实际上是 Banach 空间)，因此 X^* 也有对偶空间 $(X^*)^*$，称它为 X 的 **二次对偶空间**，记为 X^{**}. 依次类推，我们可以定义 X 的 **三次对偶空间** $(X^{**})^*$，记为 X^{***}，等等.

现在来考察 X 与 X^{**} 的关系. 设 $x\in X$，$f\in X^*$，于是 $f(x)$ 是实 (或复) 数. 原来的观点是：泛函 f 是给定的，而 x 是跑遍 X 的变元. 现在反过来，让 x 固定而让 f 跑遍 X^*. 这时 $f(x)$ 就成了定义在 X^* 上的一个泛函，记为 J_x. 于是对任一 $f\in X^*$，有

$$J_x(f)=f(x).$$

由 (5.9.1) 可知，J_x 是线性的. 由 (5.9.2) 可知

$$|J_x(f)|=|f(x)|\leq\|x\|\,\|f\|.$$

因此，J_x 有界. 故 J_x 为 X^{**} 中的元素. 因为对于每个 $x \in X$, 这个结论都成立，故可以定义映射 J : $x \longrightarrow J_x$. 映射 J 具有下列性质：

(1) 映射是线性的. 也就是

$$J_{x_1+x_2} = J_{x_1} + J_{x_2}, \quad J_{\alpha x} = \alpha J_x, \quad x_1, x_2, x \in X, \ \forall \alpha \in \mathbf{F}.$$

实际上，对任一 $f \in X^*$, 有

$$J_{x_1+x_2}(f) = f(x_1) + f(x_2) = J_{x_1}(f) + J_{x_2}(f) = (J_{x_1} + J_{x_2})(f),$$

$$J_{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha J_x(f) = (\alpha J_x)(f),$$

因为 $f \in X^*$ 是任意的，故 $J_{x_1+x_2} = J_{x_1} + J_{x_2}$, $\quad J_{\alpha x} = \alpha J_x$.

(2) 映射是等距的.

实际上，任取 $x \in X, x \neq 0$, 则对任一 $f \in X^*$, 有

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|x\| \|f\|.$$

故 $\|J_x\| \leq \|x\|$. 另一方面，对于上述预先给定的 x, 根据 Hahn-Banach 定理知，一定存在 $f_0 \in X^*$, 使得 $\|f_0\| = 1$, $f_0(x) = \|x\|$. 于是

$$\|J_x\| \geq |J_x(f_0)| = |f_0(x)| = \|x\|.$$

故 $\|J_x\| = \|x\|$.

注 J 是由 X 到 X^{**} 中的一个等距同构映射. 通常称 J 为 X 到 X^{**} 中的 **自然嵌入映射**. J 可能是满映射也可能不是满映射. 当 J 是满映射时，也就是说当 $J(X) = X^{**}$ 时，称 X 是 **自反空间**.

定理 5.61 任一赋范线性空间 X 与其二次对偶空间 X^{**} 的某一子空间保范同构，等价地说，赋范线性空间 X 总可以保范地嵌入到 X^{**} 中去.

例 5.62 空间 $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 的对偶空间是 $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

证明 由于 $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_2)$ 是 Hilbert 空间, 由 Riesz 表示定理 $(\mathbf{R}^n)^* = \mathbf{R}^n$, 即对于任意的 $f \in (\mathbf{R}^n)^*$, 始终存在 $y_f = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$, 使得

$$f(x) = \langle x, y_f \rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k, \quad \forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n,$$

而且 $\|f\| = \|y_f\|_2$. 因此，映射 $f \longrightarrow y_f$ 定义了一个 $(\mathbf{R}^n)^* \to \mathbf{R}^n$ 的保范同构.

例 5.63

(1) 空间 l^1 的对偶空间是 l^∞;

(2) 空间 $l^p\,(1<p<+\infty)$ 的对偶空间是 l^q, 其中 $1/p+1/q=1$.

证明　(1) 设 $e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, 其中第 k 个分量为 1, 其余为 0, 则对于任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^1$, 都有唯一的表达式 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$. 对于任意的 $f\in(l^1)^*$, 由于 f 是线性的并且连续, 从而

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right)=\lim_{n\to+\infty}f\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_k f(e_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\xi_k f(e_k),\tag{5.9.3}$$

因此, $\eta_k=f(e_k)$ 由 f 唯一确定. 又因为 $\|e_k\|_1=1$, $|\eta_k|=|f(e_k)|\le\|f\|\,\|e_k\|_1=\|f\|$, 所以, $\sup\{|\eta_k|:\ k\in N\}\le\|f\|$. 因此, $y_f=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^\infty$, 而且 $\|y_f\|_\infty\le\|f\|$. 由 (5.9.3) 知

$$|f(x)|\le\sum_{k=1}^{+\infty}|\xi_k|\,|f(e_k)|\le\|y_f\|_\infty\|x\|_1.$$

所以 $\|f\|\le\|y_f\|_\infty$. 故 $\|f\|=\|y_f\|_\infty$.

由 $f\in(l^1)^*$ 到 $(f(e_1),f(e_2),\cdots)=y_f\in l^\infty$ 的对应关系定义了映射 $U:\ (l^1)^*\longrightarrow l^\infty$. 已证明了 U 是保范的, 即 $\|Uf\|_\infty=\|f\|$. 容易验证 U 是线性映射. 下面证明 U 是满射. 对于任意的 $b=(\beta_1,\beta_2,\cdots)\in l^\infty$, 可以定义 l^1 上的有界线性泛函 g. 对任一 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^1$, 令 $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\xi_k\beta_k$. 显然 g 是线性的, 而且

$$|g(x)|\le\sum_{k=1}^{+\infty}|\xi_k\beta_k|\le\sup\{|\beta_k|:\ k\in\mathbf{N}\}\sum_{k=1}^{+\infty}|\xi_k|=\|b\|_\infty\|x\|_1.$$

所以 $g\in(l^1)^*$, 而且 $\|g\|\le\|b\|_\infty$, $g(e_k)=\beta_k$. 因此, U 是满射. 此即说明 U 是 $(l^1)^*$ 到 l^∞ 上的保范同构.

(2) 设 $e_k=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, 其中第 k 个分量为 1, 其余为 0. 对于任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$, 都有唯一的表达式

$$x=\sum_{k=1}^{+\infty}\xi_k e_k.$$

对于任意的 $f \in (l^p)^*$. 令 $\eta_k = f(e_k)$. 由于 f 是线性的并且是连续的，因此

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \eta_k. \tag{5.9.4}$$

所以，$\eta_k = f(e_k)$ 由 f 唯一确定. 取 $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots)$, 其中

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{|\eta_k|^q}{\eta_k}, & \text{如果 } k \le n, \text{ 且 } \eta_k \ne 0, \\ 0, & \text{如果 } k > n \text{ 或 } \eta_k = 0. \end{cases}$$

则 $x_n \in l^p$. 代入 (5.9.4) 式得到

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k^{(n)} \eta_k = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q. \tag{5.9.5}$$

由于 $(q-1)p = q$, 从而

$$\begin{aligned} f(x_n) &\le \|f\| \|x_n\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k^{(n)}|^p\right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^{(q-1)p}\right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{5.9.6}$$

由 (5.9.5) 和 (5.9.6) 可以得到

$$\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \le \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q\right)^{1/p},$$

即就有 $(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q)^{1/q} \le \|f\|$. 由于 n 是任意的，令 $n \to +\infty$, 就会有

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q} \le \|f\|.$$

所以，$y_f = (\eta_1, \eta_2, \cdots) = (f(e_1), f(e_2), \cdots) \in l^q$, 而且 $\|y_f\|_q \le \|f\|$. 再对 (5.9.4) 式应用 Hölder 不等式得到

$$|f(x)| \le \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\eta_k|^q\right)^{1/q} = \|x\|_p \|y_f\|_q.$$

故 $\|f\| \le \|y_f\|_q$, 进而知 $\|f\| = \|y_f\|_q$.

以上由 $f \in (l^p)^*$ 到 $y_f = (f(e_1), f(e_2), \cdots) \in l^q$ 的对应关系定义了一个算子 $U: (l^p)^* \longrightarrow l^q$, 即就是说, 对于任意的 $f \in (l^p)^*$, $Uf = (f(e_1), f(e_2), \cdots)$. 显然它是线性算子, 并且是保范的, 也就是 $\|Uf\|_q = \|f\|$. 下面证明 U 是满射. 对于任意的 $b = (\beta_1, \beta_2, \cdots) \in l^q$, 可以定义 l^p 上的有界线性泛函 $g: l^p \longrightarrow \mathbf{F}$. 对 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^p$, 令 $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k$. 由 Hölder 不等式知, 此级数是收敛的, 因此, g 有定义并且对变元 $x \in l^p$ 是线性的, 同时有

$$|g(x)| \le \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\beta_k|^q\right)^{1/q} = \|b\|_q \|x\|_p.$$

因此 $g \in (l^p)^*$, 而且 $g(e_k) = \beta_k$, $Ug = (g(e_1), g(e_2), \cdots) = b$, 所以, U 是 $(l^p)^* \longrightarrow l^q$ 上的满射. 故 U 是一个保范同构.

例 5.64　设 $1 < p < +\infty$, $1/p + 1/q = 1$, 则空间 $L^p(\Omega)$ 的对偶空间是 $L^q(\Omega)$, 等价地说, 对于任意的 $f \in (L^p(\Omega))^*$, 始终存在 $y(t) \in L^q(\Omega)$, 使得对于任意的 $x(t) \in L^p(\Omega)$, 有

$$f(x) = \int_\Omega x(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t, \tag{5.9.7}$$

而且

$$\|f\| = \|y\|_q = \left(\int_\Omega |y(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

同时对于任意的 $y(t) \in L^q(\Omega)$, 按照 (5.9.7) 式定义了一个 $L^p(\Omega)$ 上的有界线性泛函. 这样由 $f \longrightarrow y$ 定义的映射 $U: (L^p(\Omega))^* \longrightarrow L^q(\Omega)$, $Uf = y$, 是一个保范同构.

例 5.65　$(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$. $L^\infty(\Omega)$ 是 Ω 上几乎处处有界的可测函数 $y(t)$ 组成的空间, Ω 上可测函数 $y(t)$ 称为几乎处处有界的是指: 如果存在 Ω 中的零测度集 A, 使得 $y(t)$ 在 $\Omega - A$ 上有界, 也就是 $\sup\{|y(t)|: t \in \Omega - A\} < +\infty$. 令

$$\|y\|_\infty = \inf\{\sup\{|y(t)|:\ t \in \Omega - A\}:\ A \text{ 是 } \Omega \text{ 中的零测度集}\},$$

则 $\|y\|$ 是 $L^\infty(\Omega)$ 上的范数, $L^\infty(\Omega)$ 成为赋范线性空间. $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$ 意味着: 对于任意的 $f \in (L^1(\Omega))^*$, 始终存在 $y \in L^\infty(\Omega)$, 使得

$$f(x) = \int_\Omega x(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t, \qquad \forall x \in L^1(\Omega).$$

例 5.66

(1) $\mathbf{R}^n$、$\mathbf{C}^n$、l^p、$L^p(\Omega)\,(1<p<+\infty)$ 都是自反空间;

(2) Hilbert 空间是自反空间

例 5.67 c_0 表示所有收敛于 0 的点列 $x=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)$ 组成的线性空间，定义范数 $\|x\|=\sup\{|\xi_k|:\ k\in\mathbf{N}\}$，则 c_0 是赋范线性空间．易证 c_0 是 Banach 空间，可以证明 $(c_0)^*=l^1$．但是 $c_0^{**}=(l^1)^*=l^\infty\neq c_0$．因此，$c_0$ 不是自反空间．

注 l^1、$L^1(\Omega)$ 不是自反空间．这是因为 $(l^1)^*=l^\infty$，$(l^\infty)^*\neq l^1$，$(L^1(\Omega))^*=L^\infty(\Omega)$．但是 $(L^\infty(\Omega))^*\neq L^1(\Omega)$．

定理 5.68 设 X 是赋范线性空间．若 X 的对偶空间 X^* 是可分的，则 X 是可分的．

证明 设 $\{x_n^*\}$ 是 X^* 中可数的稠密集合．考虑 X 中的集合 $\{x_n\}$ 其中 $\|x_n\|\leq 1$ 而且 $|x_n^*(x_n)|\geq\|x_n^*\|/2$．$\{x_n\}$ 的有理系数的线性组合所成的集合显然是可数的．下面证明这个集合在 X 中稠密．

假设这个集合在 X 中不稠密．利用 Hahn-Banach 定理，可在 X^* 中找到一个元素 x^*，使得对于所有自然数 n 有：$x^*(x_n)=0$．又因

$$\begin{aligned}\|x^*-x_n^*\| &\geq |(x^*-x_n^*)(x_n)|\\ &= |x_n^*(x_n)|>\|x_n^*\|/2.\end{aligned}$$

这就得出矛盾．

给出下列定理，但略去其证明．

定理 5.69 (Pettis) 自反空间的每个闭线性子空间是自反的．

§5.10 弱 收 敛

定义 5.70 设 X 是赋范线性空间，$\{x_n\}\subset X$．如果存在 $x\in X$，使得对于任意的 $f\in X^*$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x)$，则称 $\{x_n\}$ **弱收敛**于 x，记作 $x_n\xrightarrow{w}x\,(n\to+\infty)$，$x$ 称为 $\{x_n\}$ 的**弱极限**，而把序列 $\{x_n\}$ 按照范数收敛于 x 称为**强收敛**，记作 $x_n\to x\,(n\to+\infty)$ 或 $x_n\xrightarrow{s}x\,(n\to+\infty)$，称 x 为 $\{x_n\}$ 的**强极限**．

定理 5.71 设赋范线性空间 X 中的点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x，则

(1) $\{x_n\}$ 的弱极限是唯一的;

(2) $\{x_n\}$ 的每一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 也弱收敛于 x;

(3) 弱收敛的点列 $\{x_n\}$ 一定是有界的.

证明 (1) 设 $x_n \xrightarrow{w} x\,(n\to+\infty)$, $x_n \xrightarrow{w} y\,(n\to+\infty)$. 我们有

$$f(x_n) \longrightarrow f(x),\quad f(x_n) \longrightarrow f(y)\,(n\to+\infty),\quad \forall f\in X^*.$$

由数列极限的唯一性知 $f(x)=f(y)$, 从而 $f(x-y)=0$. 由 Hahn-Banach 分离性定理知, $x-y=0$. 这样就推得 $x=y$.

(2) 对于任意的 $f\in X^*$, 由于 $f(x_n)\longrightarrow f(x)\,(n\to+\infty)$, 因此它的子列 $f(x_{n_k})\longrightarrow f(x)\,(k\to+\infty)$, 所以 $x_{n_k}\xrightarrow{w} x\,(k\to+\infty)$.

(3) 对于任意的 $f\in X^*$, $\{f(x_n)\}$ 是收敛数列, 因而是有界的, 即

$$\sup\{\,|f(x_n)|:\quad n\in\mathbf{N}\,\}=M(f)<+\infty,$$

从而由一致有界原理知 $\{x_n\}$ 有界.

定理 5.72 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 X 中的点列, 则

(1) 若 $x_n\xrightarrow{s} x\,(n\to+\infty)$, 则 $x_n\xrightarrow{w} x\,(n\to+\infty)$;

(2) 若 $x_n\xrightarrow{w} x\,(n\to+\infty)$ 不能推出 $x_n\xrightarrow{s} x\,(n\to+\infty)$;

(3) 若 $\dim X=n<+\infty$, 则弱收敛与强收敛等价.

证明 (1) 若 $x_n\xrightarrow{s} x\,(n\to+\infty)$, 对于任意的 $f\in X^*$, 由 f 的连续性可得, $f(x_n)\longrightarrow f(x)\,(n\to+\infty)$, 这意味着 $x_n\xrightarrow{w} x\,(n\to+\infty)$.

(2) 设 X 是无限维可分 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 X 的标准正交集. 对于任意的 $f\in X^*$, 由 Riesz 表示定理, 存在 $y_f\in X$, 使得, 对于任意的 $x\in X$ 有, $f(x)=\langle x,y_f\rangle$. 再由 Bessel 不等式知

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|\langle e_n,z\rangle|^2\le\|z\|^2,\quad \forall z\in X.$$

因此上式左端的级数收敛. 因而当 $n\to+\infty$ 时, $f(e_n)=\langle e_n,y_f\rangle\longrightarrow 0(\forall f\in X^*)$. 故 $e_n\xrightarrow{w} 0\,(n\to+\infty)$, 但是当 $m\ne n$ 时, 有

$$\|e_m-e_n\|^2=\|e_m\|^2+\|e_n\|^2=2,$$

所以 $\{e_n\}$ 不可能强收敛.

(3) 设 $x_m\xrightarrow{w} x\,(m\to+\infty)$, $\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$ 是 X 的一个基, 则 $x_m=\xi_1^{(m)}e_1+\xi_2^{(m)}e_2+\cdots+\xi_n^{(m)}e_n$, $x=\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n$, 而

且对于任意的 $f \in X^*$, 恒有 $f(x_m) \longrightarrow f(x)\,(m \to +\infty)$. 取 $f_k \in X^*$, 定义如下

$$f_k(e_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

则 $f_k(x_m) = \xi_k^{(m)}$, $f_k(x) = \xi_k$. 由 $f_k(x_m) \longrightarrow f_k(x)\,(m \to +\infty)$ 可以得到 $\xi_k^{(m)} \longrightarrow \xi_k\,(m \to +\infty)$. 因而当 $m \to +\infty$ 时, 有

$$\|x_m - x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} (\xi_k^{(m)} - \xi_k) e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^{(m)} - \xi_k| \|e_k\| \longrightarrow 0.$$

这就意味着 $\{x_m\}$ 强收敛于 x.

定理 5.73 设 H 是 Hilbert 空间, $\{x_n\} \subset H$, $x \in H$. 则

(1) 在 Hilbert 空间 H 中, $x_n \xrightarrow{w} x\,(n \to +\infty)$, 当且仅当对于任意的 $z \in H$, 始终有 $\langle x_n, z\rangle \longrightarrow \langle x, z\rangle\,(n \to +\infty)$;

(2) 在 Hilbert 空间 H 中, $x_n \xrightarrow{s} x\,(n \to +\infty)$, 当且仅当 $x_n \xrightarrow{w} x\,(n \to +\infty)$, 而且 $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|\,(n \to +\infty)$.

证明 (1) 由 Riesz 表现定理证明; (2) 直接按照定义去验证.

定理 5.74 在赋范线性空间 X 中, $x_n \xrightarrow{w} x\,(n \to +\infty)$ 的充分必要条件是

(1) 点列 $\{\|x_n\|\}$ 有界;

(2) 存在 $M \subset X^*$, $\overline{\operatorname{span} M} = X^*$, 使得对于任意的 $f \in M$, 恒有 $f(x_n) \longrightarrow f(x)\,(n \to +\infty)$.

证明 必要性的证明. (1) 是因为弱收敛点列一定是有界的; (2) 是明显的.

充分性的证明. 设 (1), (2) 成立. 由于点列有界, 因而存在正的常数 C, 使得对于任意的自然数 n, 有 $\|x_n\| \leq C$, 而且 $\|x\| \leq C$. 此外, 对于任意的 $f \in X^*$ 和 $\varepsilon > 0$, 由 (2) 知, 一定存在 $g \in \operatorname{span} M$, 使得 $\|g - f\| < \varepsilon/(3C)$, 其中 $g = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i f_i$, $f_i \in M$, $\alpha_i \in \mathbf{F}$. 由于

$$f_i(x_n) \longrightarrow f_i(x),\quad g(x_n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(x) = g(x)\,(n \to +\infty),$$

故一定存在自然数 N，当 $n > N$ 时，有 $|g(x_n) - g(x)| < \varepsilon/3$. 所以，

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(x)| &< |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\ &< \|f - g\|\|x_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f - g\|\|x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3C}C + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3C}C = \varepsilon.\end{aligned}$$

故对于任意的 $f \in X^*$，可以知道 $f(x_n) \longrightarrow f(x)\,(n \to +\infty)$. 这就得知 $x_n \xrightarrow{w} x\,(n \to +\infty)$.

定义 5.75 (弱 * 收敛) 设 X 为赋范线性空间，X^* 中的点列 $\{f_n\}\,(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ 称为 **弱 * 收敛** 于 $f_0 \in X^*$ 是指：对于任意的 $x \in X$，恒有 $f_n(x) \longrightarrow f_0(x)\,(n \to +\infty)$. f_0 称为 $\{f_n\}$ 的 **弱 * 极限**.

定理 5.76

(1) 弱 * 极限是唯一的；

(2) 有界线性泛函点列依 X^* 中的范数收敛意味着弱 * 收敛；

(3) 设 X 是 Banach 空间，如果 X 上的有界线性泛函点列 $\{f_n\}\,(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ 弱 * 收敛于 $f_0 \in X^*$，则 $\{\|f_n\|\}$ 是有界数列.

证明

(1) 若 X 上有界线性泛函点列 $\{f_n\}$ 同时弱 * 收敛于 f_0 及 f_0'，由弱 * 收敛的定义可知，对于任何 $x \in X$，恒有 $f_0(x) = f_0'(x)$，故 $f_0 = f_0'$.

(2) 设 $\{f_n\} \subset X^*\,(n = 1,\ 2,\ \cdots)$，$f_0 \in X^*$ 而且 $\|f_n - f_0\| \longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$. 任取 $x \in X$，因为

$$|f_n(x) - f_0(x)| \le \|f_n - f_0\|\|x\| \longrightarrow 0\,(n \to +\infty),$$

所以 $\{f_n\}$ 弱 * 收敛于 f_0.

(3) 由一致有界原理得到.

定理 5.77 如果 $f_n \xrightarrow{w} f\,(n \to +\infty)$，那么 $f_n \xrightarrow{w^*} f\,(n \to +\infty)$.

证明 由于 $X^{**} \supset J(X)$，如果对于任意的 $F \in X^{**}$，$F(f_n) \longrightarrow F(f)\,(n \to +\infty)$，则对于任意的 $x \in X$，$J(x) = \hat{x} \in X^{**}$，$f_n(x) = \hat{x}(f_n) \longrightarrow \hat{x}(f) = f(x)\,(n \to +\infty)$，所以，$f_n \xrightarrow{w^*} f\,(n \to +\infty)$.

命题 5.78 如果 X 是自反空间，则弱 * 收敛与弱收敛是等价的.

证明 因为 $J(X) = X^{**}$.

定理 5.79 (弱 * 列紧性) 设 X 是可分的赋范线性空间，则 X^* 中任一有界点列 $\{f_n\}$ 有弱 * 收敛的子列.

证明　因为 X 是可分的赋范线性空间，因此 X 中有可数稠密的子集 $A=\{x_k:\ k\in\mathbf{N}\}$. 由 $\{f_n\}$ 有界可知，存在常数 $M>0$，使得对于任意的自然数 n，恒有 $\|f_n\|\le M$. 因此，$|f_n(x_1)|\le\|f_n\|\|x_1\|\le M\|x_1\|$. 所以，$\{f_n(x_1)\}$ 是有界数列，由列紧性定理 1.18 知，它有收敛的子列 $\{f_n^{(1)}(x_1):\ n\in\mathbf{N}\}$. 类似地有，$|f_n^{(1)}(x_2)|\le\|f_n^{(1)}\|\|x_2\|\le M\|x_2\|$. 所以 $\{f_n^{(1)}(x_2):\ n\in\mathbf{N}\}$ 是有界数列，它也有收敛的子列 $\{f_n^{(2)}(x_2):\ n\in\mathbf{N}\}$. 这样继续下去，对于任意的 $m\in\mathbf{N}$，就会得到 f_n 的子列 $\{f_n^{(m)}:\ n\in\mathbf{N}\}$，使得数列 $\{f_n^{(m)}(x_m):\ n\in\mathbf{N}\}$ 收敛，而且 $\{f_n^{(m)}:\ n\in\mathbf{N}\}$ 是 $\{f_n^{(m-1)}\}$ 的子列. 因此，对于任何的 $1\le k\le m$，$\{f_n^{(m)}(x_k):\ n\in\mathbf{N}\}$ 都收敛，此点列可以排列如下：

$$
\begin{array}{cccc}
f_1^{(1)}, & f_2^{(1)}, & f_3^{(1)}, & \cdots \\
f_1^{(2)}, & f_2^{(2)}, & f_3^{(2)}, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f_1^{(m)}, & f_2^{(m)}, & f_3^{(m)}, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

其中每一点列都是前一点列的子列，取对角线点列 $f_n^{(n)}$，对于任意的 k，当 $m\ge k$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n^{(m)}(x_k)$ 存在，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n^{(n)}(x_k)$ 存在，但由于 $f_n^{(n)}$ 在 X 的一个稠密子集上收敛，故由前一定理知，一定存在 $f\in X^*$，使得 $f_n^{(n)}\xrightarrow{w^*}f\ (n\to+\infty)$.

我们仅给出下列结论，但略去其证明.

定理 5.80

(1) 空间 $C([a,b])$ 中的点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x\in C([a,b])$，当且仅当

(i) $\{x_n(t)\}$ 作为函数列在 $[a,b]$ 上处处收敛于 $x(t)$;

(ii) $\{\|x_n\|\}$ 为有界数列.

(2) 空间 $L^p([a,b])(1<p<+\infty)$ 中的点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 $x\in L^p([a,b])$，当且仅当

(i) 对于任意的 $t\in[a,b]$，$\int_a^t x_n(u)\,\mathrm{d}u\to\int_a^t x(u)\,\mathrm{d}u$;

(ii) $\{\|x_n\|\}$ 为有界数列.

(3) 设 X 是赋范线性空间，$\{f_n\}\subset X^*$，如果

(i) $\{\|f_n\|\}$ 有界;

(ii) 在 X 的某一稠密子集 M 上 $\{f_n(x)\}$ 收敛.

则存在 $f \in X^*$, 使得 $f_n \xrightarrow{w^*} f\,(n \to +\infty)$.

(4) (Eberlein) 自反空间的单位闭球是弱紧的.

(5) (Alaoglu) 设 X 是赋范线性空间, 则 X^* 中的单位闭球是弱 * 紧的.

§5.11　对偶算子

设 T 是由赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的有界线性算子. 任取 $f \in Y^*$, 则 $f(Tx)$ 关于 $x \in X$ 是线性的. 由不等式 $|f(Tx)| \le \|f\|\|T\|\|x\|$ 可知, $f(Tx)$ 是有界的, 因此, 它是关于 $x \in X$ 的一个有界线性泛函. 令

$$f^*(x) = f(Tx). \tag{5.11.1}$$

则 $f^* \in X^*$. 显然当 f 在 Y^* 中给定时, f^* 就在 X^* 中被确定下来, 这就意味着建立了一个由 Y^* 到 X^* 的映射. 这个映射通过 (5.11.1) 将 f 映成 f^*, 记这个映射为 T^*. 于是 $T^*f = f^*$.

定义 5.81　设 X, Y 是赋范线性空间, $T \in B(X,Y)$. T 的**对偶算子** T^* 是指: $T^*: \ Y^* \longrightarrow X^*$,

$$(T^*f)(x) = f(Tx), \qquad \forall f \in Y^*,\ x \in X.$$

定理 5.82　设 X, Y 是赋范线性空间, $T \in B(X,Y)$, 则 T^* 是有界线性算子, 而且 $\|T^*\| = \|T\|$.

证明　对于任意的 $f,\ g \in Y^*,\ \alpha,\ \beta \in \mathbf{F},\ x \in X$, 有

$$\begin{aligned}[T^*(\alpha f + \beta g)](x) &= (\alpha f + \beta g)(Tx) = \alpha f(Tx) + \beta g(Tx)\\ &= \alpha (T^*f)(x) + \beta (T^*g)(x) = (\alpha T^*f + \beta T^*g)(x).\end{aligned}$$

因此, $T^*(\alpha f + \beta g) = \alpha T^*f + \beta T^*g$, 即说明 T 是线性的. 又因为

$$|(T^*f)(x)| = |f(Tx)| \le \|f\|\|T\|\|x\|,$$

从而 $\|T^*f\| \le \|T\|\|f\|$, 这意味着 T^* 是有界的并且 $\|T^*\| \le \|T\|$. 另一方面, 对任一 $x_0 \in X$, 则有 $Tx_0 \in Y$. 从而, 由 Hahn-Banach 定理的存在定理可知, 存在 $f_0 \in Y^*$, 使得 $\|f_0\| = 1$ 和 $f_0(Tx_0) = \|Tx_0\|$. 故

$$\begin{aligned}\|Tx_0\| &= |f_0(Tx_0)| = |(T^*f_0)(x_0)| \le \|T^*f_0\|\|x_0\|\\ &\le \|T^*\|\|f_0\|\|x_0\| = \|T^*\|\|x_0\|.\end{aligned}$$

这样我们可以知道，对每一个 $x_0 \in X$，$\|Tx_0\| \le \|T^*\|\|x_0\|$. 从而知 $\|T\| \le \|T^*\|$. 综合上面的证明可以得到 $\|T^*\| = \|T\|$.

定理 5.83 设 X、Y 和 Z 都是赋范线性空间.

(1) 若 T, $S \in B(X, Y)$, α, $\beta \in \mathbf{F}$, 则 $(\alpha T+\beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$;

(2) 若 $T \in B(X, Y)$, $S \in B(Y, Z)$, 则 $(ST)^* = T^* S^*$;

(3) 若 $T \in B(X, Y)$, T^{-1} 存在且 $T^{-1} \in B(Y,X)$, 则 $(T^*)^{-1} \in B(X^*, Y^*)$, 而且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

证明

(1) 对于任意的 $f \in Y^*$, $x \in X$, 有

$$\begin{aligned}[(\alpha T + \beta S)^*f](x) &= f[(\alpha T + \beta S)x] = f(\alpha Tx + \beta Sx) \\ &= \alpha f(Tx) + \beta f(Sx) = \alpha (T^*f)(x) + \beta (S^*f)(x) \\ &= (\alpha T^* f + \beta S^* f)(x),\end{aligned}$$

所以，$(\alpha T + \beta S)^* f = \alpha T^* f + \beta S^* f = (\alpha T^* + \beta S^*) f$. 故，$(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$.

(2) 对于任意的 $h \in Z^*$, $x \in X$, 由 $ST \in B(X, Z)$ 知,

$$[(ST)^*h](x) = h(STx) = (S^*h)(Tx) = T^*(S^* h)(x) = [(T^* S^*) h](x).$$

所以，对于任意的 $h \in Z^*$, 有 $(ST)^* h = (T^* S^*)h$, 故 $(ST)^* = T^* S^*$.

(3) 对于任意的 $g \in Y^*$, 则 $T^* g \in X^*$. 因为 $(T^{-1})^* \in B(X^*, Y^*)$, 那么对于任意的 $y \in Y$, 我们有

$$((T^{-1})^* T^* g)(y) = T^* g(T^{-1} y) = g(TT^{-1} y) = g(y).$$

所以，对于任意的 $g \in Y^*$, 有 $(T^{-1})^* T^* g = g$. 故 $(T^{-1})^* T^* = I_{Y^*}$, 其中 I_{Y^*} 表示 Y^* 上的恒等算子.

另一方面，对于任意的 $f \in X^*$, 有 $(T^{-1})^* f \in Y^*$. 从而，对于任意的 $x \in X$, 就有

$$[T^*(T^{-1})^* f](x) = [(T^{-1})^* f](Tx) = f[(T^{-1}T) x] = f(x).$$

所以，对于任意的 $f \in X^*$ 有：$T^* (T^{-1})^* f = f$. 因此，$T^* (T^{-1})^* = I_{X^*}$. 故 $(T^*)^{-1}$ 存在，而且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \in B(X^*,Y^*)$.

定理 5.84 T 的对偶算子 T^* 也有对偶算子 $(T^*)^*$, 将它简记为 T^{**}. 若将 X 看成 X^{**} 的子空间，则 T^{**} 是 T 的延拓，而且 $\|T^{**}\| = \|T\|$.

证明 由于 $T^* \in B(Y^*, X^*)$, $(T^*)^* \in B(X^{**}, Y^{**})$, 从而

$$[T^{**}F](g) = F(T^*g), \quad \forall F \in X^{**}, \ \forall g \in Y^*.$$

对于任意的 $x \in X$, 我们有 $J(x) = J_x = \widehat{x} \in X^{**}$. 这样就会有

$$[T^{**}\widehat{x}](g) = \widehat{x}(T^*g) = [T^*g](x) = g(Tx) = \widehat{Tx}(g).$$

所以, $T^{**}\widehat{x} = \widehat{Tx}$. 若把 X 嵌入到 X^{**}, 把 Y 嵌入到 Y^{**}, 也就是把 X 看成 X^{**} 的子空间 $J(X)$, 把 Y 看成 Y^{**} 的子空间 $J(Y)$, 因而 x 与 $\widehat{x}$ 视为同一, Tx 与 $\widehat{Tx}$ 视为同一, 于是 $T^{**}x = Tx$, 因而 T^{**} 是 T 的延拓, 而且 $\|T^{**}\| = \|T^*\| = \|T\|$.

例 5.85 设 $T:\ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ 为一有界线性算子, 可用 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

表示.

对于任意的 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n$, 我们有

$$Tx = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}\xi_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}\xi_j, \cdots, \sum_{j=1}^n a_{mj}\xi_j\right).$$

因为 $(\mathbf{R}^n)^* = \mathbf{R}^n$, $(\mathbf{R}^m)^* = \mathbf{R}^m$, 所以, 对于任意的 $y^* = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m) \in (\mathbf{R}^m)^*$, 有

$$(T^*y)^*(x) = y^*(Tx) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\eta_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\eta_i\right)\xi_j.$$

由 x 的任意性, 以及 $T^*y^* \in (\mathbf{R}^n)^* = \mathbf{R}^n$, 得到

$$T^*y^* = \left(\sum_{i=1}^m a_{i1}\eta_i, \sum_{i=1}^m a_{i2}\eta_i, \cdots, \sum_{i=1}^m a_{in}\eta_i\right).$$

这就表明 T^* 由 A 的转置矩阵来表示.

第六章 谱 理 论

在线性代数中，对称矩阵 A 可以对角化是一个核心定理，这意味着存在 $\mathbf{C}^n$ 的标准正交基 $\{e_k\}$ 使得相对于该矩阵的线性变换 T： $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ 有如下表示：

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k,$$

其中 λ_k ($k = 1, 2, \cdots, n$) 是矩阵 A 相对于特征向量 e_k ($k = 1, 2, \cdots, e_n$) 的特征值，$x_k = \langle x, e_k \rangle$ 是 x 的坐标．人们期望将此结果推广到无限维空间中的线性算子．

本章主要介绍有界线性算子谱的概念与基本性质．在此基础上介绍紧算子谱的 Riesz-Schauder 理论．最后介绍一些特殊类算子的概念与基本性质及其谱定理．

§6.1 有界线性算子的谱理论

谱理论是现代泛函分析及其应用的一个主要分支，粗略地说，它是研究某种形式逆算子的一般性质以及它们与原算子的关系．在研究方程的求解问题中，这种算子出现的非常自然．例如，在线性代数方程、微分方程、积分方程与变分问题中，很多问题可以转化为如下形式的算子方程：

$$(\lambda I - T)x = y, \tag{6.1.1}$$

以及相应的齐次方程

$$(\lambda I - T)x = 0. \tag{6.1.2}$$

其中 T： $D(T) \to X$ 是给定的一个线性算子，定义域 $D(T)$ 和值域 $R(T)$ 都在复赋范线性空间 X 中，I 为定义在 $D(T)$ 上的恒等算子，λ 是一个复数．若 $\lambda I - T$ 有逆，用 $R(\lambda; T)$ 表示 $(\lambda I - T)^{-1}$，称 $R(\lambda; T)$ 为 T 的**预解算子或预解式**．因此，要进一步研究带参数的方程 (6.1.1) 和 (6.1.2) 解的存在性、唯一性和稳定性，即就是要了解算子 T 的结构，很显然研究 $R(\lambda; T)$ 的性质是基础，当然 $\lambda I - T$ 和 $R(\lambda; T)$ 的许多性质都依赖于参数 λ，从而

λ 所形成的集合是人们感兴趣的. 通过对算子谱的研究不但可以了解算子本身的结构, 从而刻画相应方程解的结构, 而且在现代工程中求振动的频率、判定系统的稳定性都与相应算子的谱及其分布有关. 本节主要介绍有界线性算子的谱理论, 但有关概念在一般范围给出.

定义 6.1 设 X 是复 Banach 空间, λ 是复数, $T:\ X\supset D(T)\longrightarrow X$ 是一个闭线性算子, 如果存在 $x_0\in D(T)$, $x_0\neq 0$, 满足 $(\lambda I-T)x_0=0$, 则称 λ 为算子 T 的 **特征值**. 特征值的全体记为 $\sigma_p(T)$, 称它为 T 的 **点谱**, 此时称 $x_0\neq 0$ 为算子 T 的相应于特征值 λ 的 **特征向量**. 相应于一个特征值 λ 的特征向量的全体以及零元素构成 X 的一个线性子空间, 称为算子 T 的相应于特征值 λ 的 **特征向量空间**, 简称 **特征空间**, 记为 $E_\lambda(T)$, 而 $\dim E_\lambda(T)$ 称为 **特征值 λ 的重数**. 因此, 有

$$E_\lambda(T)=\{x\in D(T):\ Tx=\lambda x\}=\ker(\lambda I-T)$$

定义 6.2 设 X 是复 Banach 空间, $T:\ X\supset D(T)\longrightarrow X$ 是一个闭线性算子, 如果存在复数 λ, 使得

(1) $T_\lambda:=\lambda I-T$ 的值域 $R(\lambda I-T)=(\lambda I-T)D(T)=X$;

(2) $R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}$ 存在;

(3) $R(\lambda;T)$ 是有界线性算子.

则称 λ 为 T 的 **正则值**. T 的正则值全体称为 T 的 **预解集**, 记为 $\rho(T)$, 而 $R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}$ 称为 T 的 **预解算子**. $\sigma(T)=\mathbf{C}-\rho(T)$ 称为 T 的 **谱**, $\sigma(T)$ 中的每个复数称为 T 的 **谱点**.

我们进一步分析一下算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 的结构. 若 $\lambda\in\mathbf{C}$ 使得 $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在, 算子 $\lambda I-T$ 的值域有下面几种情形:

(1) $R(\lambda I-T)=X$. 在这种情况下, 因为 T 是闭线性算子, 于是 $\lambda I-T$ 也是闭线性算子. 又因为 $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在, 从而 $(\lambda I-T)^{-1}$ 也是闭线性算子, 即 $(\lambda I-T)^{-1}$ 是全空间 X 上定义的闭算子, 由闭图像定理可知, $(\lambda I-T)^{-1}$ 是 X 上的有界线性算子, 因而 λ 是正则值.

(2) $R(\lambda I-T)\neq X$, 但是 $\overline{R(\lambda I-T)}=X$.

(3) $\overline{R(\lambda I-T)}\neq X$.

由此可知, 情况 (2) 和 (3) 对应的复数 λ 都是算子 T 的谱点.

定义 6.3 设 X 是复 Banach 空间, $T:\ X\supset D(T)\longrightarrow X$ 是一个闭线性算子,

(1) 如果存在复数 λ, 使得 $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在, 但是 $R(\lambda I-T)\neq X$,

$\overline{R(\lambda I-T)}=X$, 则称 λ 为 T 的**连续谱**. 连续谱的全体记为 $\sigma_c(T)$. 因此,

$$\sigma_c(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ \ker(\lambda I-T)=\{0\},\ \overline{R(\lambda I-T)}=X,\ R(\lambda I-T)\neq X\}.$$

等价地说连续谱为: 若 $\lambda\in\sigma(T)$, 并且方程 $(\lambda I-T)x=0$ 只有零解, 但 $\lambda I-T$ 的值域 $R(\lambda I-T)$ 在 X 中稠密, 则称 λ 为 T 的连续谱.

(2) 如果存在复数 λ, 使得 $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在, 但是 $\overline{R(\lambda I-T)}\neq X$, 则称 λ 为 T 的**剩余谱**. 剩余谱的全体记为 $\sigma_r(T)$, 即有

$$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\mathbf{C}:\ \ker(\lambda I-T)=\{0\},\ \overline{R(\lambda I-T)}\neq X\}.$$

等价地说剩余谱为: 若 $\lambda\in\sigma(T)$, 并且方程 $(\lambda I-T)x=0$ 只有零解, 但 $\lambda I-T$ 的值域 $R(\lambda I-T)$ 在 X 中不稠密, 则称 λ 为 T 的剩余谱.

注 我们将复平面 $\mathbf{C}$ 划分为四个不相交的数集, 即就是有

$$\mathbf{C}=\rho(T)\cup\sigma(T)=\rho(T)\cup\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T).$$

特别地, $\sigma(T)$ 可以分为如下情形:

(1) 当 $\dim X<+\infty$ 时, $\sigma(T)=\sigma_p(T)$;

(2) 当 $\dim X=+\infty$ 时, $\sigma(T)=\sigma_p(T)\cup\sigma_c(T)\cup\sigma_r(T)$.

一般说来, 线性算子的三种谱点都有可能存在.

例 6.4

(1) 设 $T:\ \mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ 是一个对应于矩阵 A 的线性算子, 则 T 仅有点谱;

(2) 设 $\partial=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, D(\partial)=C^1([0,1])$, 则 ∂ 仅有点谱;

(3) 设 $X=l^1$, 在 X 上定义线性算子 T 如下:

$$T(x_1,x_2,\cdots)=\left(x_1,\frac{1}{2}x_2,\frac{1}{3}x_3,\cdots\right).$$

则 $0\in\sigma_r(T)$, $\sigma_p(T)=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$ 和 $\rho(T)\subset\mathbf{C}\backslash\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$;

(4) 设 X 是复 Banach 空间 $C([0,1])$. 定义 X 上的乘法算子 T: $(Tx)(t)=tx(t)$, $\forall x\in X$. 则 $\rho(T)=\mathbf{C}\backslash[0,1]$, $\sigma_r(T)=[0,1]$.

证明 (1) A 的特征多项式的根是 T 的全部特征值, 当 λ 不是 T 的特征值时, $R(\lambda;T)\in B(\mathbf{C}^n)$. 因此, $\sigma(T)$ 仅有点谱, 即 $\sigma(T)=\{\lambda_k\}_{k=1}^n$, 而且 $\rho(T)=\mathbf{C}\backslash\{\lambda_k\}_{k=1}^n$.

(2) 对于任意的 $\lambda\in\mathbf{C}$, 恒有 $(\lambda I-\partial)e^{\lambda t}=0$, 所以 $\sigma(\partial)$ 仅有点谱, 也就是说 $\sigma(\partial)=\mathbf{C}$, 因此, $\rho(T)=\emptyset$.

(3) 考察方程 $(\lambda I-T)x=y,\ x,y\in l^1$. 若 $\lambda=0$, 则 $Tx=-y$, 从而有 $x=T^{-1}(-y)=(y_1,2y_2,\cdots,ny_n,\cdots)$. 如果取 $y=\left(1,\frac{1}{2^2},\frac{1}{3^2},\cdots,\frac{1}{n^2},\cdots\right)$, 则 $x=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right)\notin l^1$. 所以 T^{-1} 是无界算子, 故 $0\in\sigma(T)$. 又因 $Tx=0$ 只有零解, 因此 $0\notin\sigma_p(T)$. 取空间 l^1 的一个标准基 $\{e_n\}$, 其中 e_n 的第 n 个位置是 1 其他位置全为 0. 因为 $T(ne_n)=e_n$, 所以 $e_n\in R(T)$, 因此 $\overline{R(T)}=l^1$, 由定义知 $0\in\sigma_c(T)$.

当 $\lambda=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$ 时, 上面的非齐次方程无解 (逆算子 $R(\lambda,T)$ 不存在), 但齐次方程 $(\lambda I-T)x=0$ 有非零解, 所以 $\sigma_p(T)=\{\frac{1}{n}:\ n=1,2,\cdots\}$, 故 $\rho(T)\subset\mathbf{C}\backslash\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$.

(4) 设 $\lambda\notin[0,1]$, 定义算子 $R_\lambda:C([0,1])\to C([0,1])$ 如下:

$$(R_\lambda x)(t)=\frac{x(t)}{\lambda-t},$$

则 R_λ 是有界线性算子. 事实上, 有界性可以从下面的估计式:

$$\|R_\lambda x\|=\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{x(t)}{\lambda-t}\right|=\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{\lambda-t}\right|\|x\|$$

得到. 又因为对于任意的 $x\in C([0,1])$, 有

$$[R_\lambda(\lambda I-T)x](t)=[(\lambda I-T)R_\lambda x](t)=x(t).$$

因此, $R_\lambda=(\lambda I-T)^{-1}$, 故 $\lambda\in\rho(T)$.

若 $\lambda\in[0,1]$, 则 R_λ 是无界的. 下面证明此时方程 $(\lambda I-T)x=0$ 只有零解. 否则, 若存在 $x_0\in C([0,1])$, 使得

$$(\lambda I-T)x_0(t)=(\lambda-t)x_0(t)=0,$$

则当 $t\neq\lambda$ 时, $x_0(t)=0$. 由 $x_0(t)$ 的连续性可知, $x_0(\lambda)=0$. 因而对于任意的 $t\in[0,1]$, 有 $x_0(t)\equiv0$. 所以, $\lambda\notin\sigma_p(T)$. 最后证明 $R(\lambda I-T)$ 在 $C([0,1])$ 中不稠密. 事实上, 由于

$$(\lambda I-T)x(t)=(\lambda-t)x(t),\qquad x\in C([0,1]).$$

当 $t=\lambda$ 时, 有 $(\lambda-t)x(t)=0$. 这样, 对于 $C([0,1])$ 中的函数 $x_0(t)$, 有

$$\|x_0-(\lambda I-T)x\|=\max_{t\in[0,1]}|x_0(t)-(\lambda-t)x(t)|\geqslant|x_0(\lambda)|,$$

因此，$R(\lambda I - T)$ 在 $C([0,1])$ 中不可能稠密，故 $\lambda \in \sigma_r(T)$.

定理 6.5 设 X 是复 Banach 空间，$T \in B(X)$. 如果 $\|T\| < 1$, 则有 $(I-T)^{-1} \in B(X)$, 而且 $(I-T)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T^n$, 右端的级数按算子范数收敛，而且

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T\|}.$$

证明 因为 $\|T^n\| \leq \|T\|^n \ (n=0,1,\cdots)$, $\|T\|<1$, 所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} T^n$ 收敛，设其和为 $S \in B(X)$. 下面证明 $S=(I-T)^{-1}$. 为此令 $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} T^k \ (n=0,1,\cdots)$, 于是

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k \longrightarrow S = \sum_{k=0}^{+\infty} T^k \ (n \to +\infty).$$

因此，对于 $n=0,1,\cdots$, 有

$$(I-T)S_n = I - T^{n+1}, \qquad S_n(I-T) = I - T^{n+1}. \tag{6.1.3}$$

由于 $\|T\|<1$, 则 $T^{n+1} \longrightarrow \theta \ (n \to +\infty)$. 在 (6.1.3) 的两个等式中，令 $n \to +\infty$, 便可以得到

$$(I-T)S = I, \qquad S(I-T) = I.$$

所以，存在 $(I-T)^{-1} = S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} T^k$, 而且

$$\|(I-T)^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|T\|^k = \frac{1}{1-\|T\|}.$$

定理 6.6 设 X 是复 Banach 空间，$T \in B(X)$. 若 $|\lambda| > \|T\|$, 则 λ 是 T 的正则值，而且

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}, \qquad \|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

证明 因为对于任意的 $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$, $\lambda I - T = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$. 根据定理 6.5 知，当 $|\lambda| > \|T\|$ 时，存在 $(I - \frac{T}{\lambda})^{-1} \in B(X)$, 因而必定存在

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} \in B(X),$$

而且

$$R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}},$$

进而得到

$$\|R(\lambda;T)\|=\frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(I-\frac{T}{\lambda}\right)^{-1}\right\|\leq\frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\left\|\frac{T}{\lambda}\right\|}=\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}.$$

设 $T(t)$ 是定义在复平面内某一区域 G 内并取值于复赋范线性空间 X 中的向量值函数，如果对于给定的 $t\in G$，比值

$$\frac{T(t+h)-T(t)}{h}$$

当 $h\to 0$ 时按范收敛于 X 中某一极限，则称此极限为 $T(t)$ 在 t 处的**强导数**，记作 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)$. 此时，称 $T(t)$ 在 t 处**强可导(或强可微)**. 若 $T(t)$ 在 G 中每一点处强可导，则称 $T(t)$ 在 G 内**解析**.

定理 6.7 设 X 是复 Banach 空间，$T\in B(X)$，则

(1) $\rho(T)$ 是 $\mathbf{C}$ 中的开集;

(2) $R(\lambda;T)$ 在 $\rho(T)$ 内是算子值解析函数.

证明 (1) 设 $\lambda_0\in\rho(T)$. 则

$$\begin{aligned}\lambda I-T&=(\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-T)\\&=(\lambda_0 I-T)[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1}].\end{aligned}$$

根据定理 6.5，当 $|\lambda-\lambda_0|<\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|^{-1}$ 时，$[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1}]^{-1}\in B(X)$. 从而

$$(\lambda I-T)^{-1}=[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1}]^{-1}(\lambda_0 I-T)^{-1}\in B(X).\tag{6.1.4}$$

故当 $|\lambda-\lambda_0|<\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|^{-1}$ 时，有 $\lambda\in\rho(T)$. 此即说明 $\rho(T)$ 是开集.

(2) (i) 先证 $R(\lambda;T)$ 连续. 设 $\lambda_0\in\rho(T)$，由 (6.1.4)，当 $|\lambda-\lambda_0|<[2\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|]^{-1}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|R(\lambda;T)\|&\leq\|R(\lambda_0;T)\|\|[I+(\lambda-\lambda_0)R(\lambda_0;T)]^{-1}\|\\&\leq 2\|R(\lambda_0;T)\|\end{aligned}\tag{6.1.5}$$

(ii) 设 λ, $\mu \in \rho(T)$. 直接计算得到

$$\begin{aligned}(\lambda I - T)^{-1} &= (\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)(\mu I - T)^{-1} \\ &= (\lambda I - T)^{-1}[(\mu - \lambda) I + \lambda I - T](\mu I - T)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)(\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)^{-1} + (\mu I - T)^{-1}.\end{aligned}$$

从而有

$$R(\lambda;T) - R(\mu;T) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda;T)\, R(\mu;T). \tag{6.1.6}$$

因此, 由 (6.1.5) 和 (6.1.6), 得到

$$\begin{aligned}&\| R(\lambda;T) - R(\lambda_0;T) \| \\ \leq\ & |\lambda - \lambda_0|\, \| R(\lambda;T) \|\, \|R(\lambda_0;T)\| \\ \leq\ & 2\| R(\lambda_0;T) \|^2 |\lambda - \lambda_0| \longrightarrow 0\,(\lambda \to \lambda_0).\end{aligned}$$

最后证明可微性. 由 (6.1.6), 得到

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{R(\lambda;T) - R(\lambda_0;T)}{\lambda - \lambda_0} = -\lim_{\lambda\to\lambda_0} R(\lambda;T)\, R(\lambda_0;T) = -R(\lambda_0;T)^2.$$

给出下面的定理, 但略去其证明.

定理 6.8 设 X 是复 Banach 空间, $T \in B(X)$, 则

(1) 设 $\lambda, \mu \in \rho(T)$, 则有下面的预解式方程

$$R(\lambda;T) - R(\mu;T) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda;T)\, R(\mu;T)$$

并且有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,\lambda^n} R(\lambda;T) = (-1)^n n!\, R(\lambda;T)^{n+1},\ \ n = 1,\ 2, \cdots.$$

(2) $\sigma(T)$ 是有界闭集 (紧集), 而且 $\sigma(T) \subset \{\lambda:\ \lambda \in \mathbf{C},\ |\lambda| \leq \|T\|\}$.

(3) $\sigma(T) \neq \emptyset$.

(4) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$, 并且当 $\lambda \in \rho(T)$ 时, 有 $R(\lambda;T)^* = R(\lambda;T^*)$.

例 6.9 设 X 是可分 Hilbert 空间, $\{e_k : k \in \mathbf{N}\}$ 是 X 的标准正交基, 对于 $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k$, 单侧移位算子 T 定义为

$$T x = \sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k e_{k-1}.$$

则 $\sigma(T)$ 是复平面上的闭单位圆盘.

证明　设 λ 是相对于特征向量 $x=(x_1, x_2, \cdots)$ 的特征值，则 $Tx=\lambda x, x_2=\lambda x_1, x_3=\lambda x_2=\lambda^2 x_1, \cdots x_k=\lambda^{k-1}x_1, \cdots$. 取 $x_1=1$, 我们得到特征向量 $x=(1, \lambda, \lambda^2, \cdots)$. 要使 $x\in X$, 必定有

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|\lambda^{k-1}|^2<+\infty,$$

因此，$\lambda\in\mathbf{C}$, $|\lambda|<1$ 是 T 的特征值. 对任意 $x\in X$, 我们有

$$\|Tx\|^2=\sum_{k=2}^{+\infty}|x_{k-1}|^2=\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^2=\|x\|^2,$$

这就表明 $\|T\|=1$, 因此，$\sigma(T)$ 必定包含在复平面上的闭单位圆盘中，但是 $\sigma(T)$ 是闭的，所以 $\sigma(T)$ 是复平面上的闭单位圆盘.

定义 6.10　设 X 是复 Banach 空间，$T\in B(X)$, 数

$$r_\sigma(T)=\sup\{|\lambda|:\ \lambda\in\rho(T)\}$$

称为算子 T 的 **谱半径**.

定理 6.11 (谱半径定理)　设 X 是复 Banach 空间，则

(1) $r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to+\infty}\|T^n\|^{1/n}$;

(2) $r_\sigma(T)\le\|T\|$;

(3) 当 $|\lambda|>r_\sigma(T)$ 时，$R(\lambda;T)$ 有下面的展开式：

$$R(\lambda;T)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{T^{n-1}}{\lambda^n}$$

注　谱半径定理中 (1) 是著名的 Gelfand 定理，它是一个深刻的定量关系. 谱半径定理中 (2) 明显过分粗糙，即使 $\|T\|$ 很大，也有可能 $r_\sigma(T)=0$.

谱半径定理应用很广，利用它完全解决了算子幂级数的收敛判别问题.

定理 6.12　设 X 是一个复 Banach 空间，$T\in B(X)$, 幂级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_kx^k$ 的收敛半径为 R,

(1) 若 $r_\sigma(T)<R$, 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_kT^k$ 绝对收敛;

(2) 若 $r_\sigma(T)>R$, 则级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_kT^k$ 发散.

证明 (1) 对于正项级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}\|a_kT^k\|$ 来说，由于

$$\begin{aligned}\overline{\lim_k}\|a_kT^k\|^{1/k} &= \overline{\lim_k}|a_k|^{1/k}\lim_k\|T^k\|^{1/k}\\ &= r_\sigma(T)/R<1.\end{aligned}$$

由高等数学中的 Cauchy 判别法知 $\sum_{k=1}^{+\infty}\|a_kT^k\|$ 收敛.

(2) 若 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_kT^k$ 收敛, 则 $\lim_{k\to+\infty}\|a_kT^k\|=0$, 因此 $\alpha:=\sup_k\|a_kT^k\|<+\infty$. 所以

$$\frac{r_\sigma(T)}{R}=\overline{\lim_k}\|a_kT^k\|^{1/k}\le\lim_{k\to+\infty}\alpha^{1/k}\le 1,$$

也就有 $r_\sigma(T)\le R$. 因此, 当 $r_\sigma(T)>R$ 时级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}a_kT^k$ 不可能收敛.

§6.2 紧 算 子

在这一节, 将对紧线性算子作比较系统的研究, 它的性质与有限维空间中的矩阵很相似. 它在积分方程和数学物理问题的研究中起着重要的作用.

定义 6.13 设 X 与 Y 都是赋范线性空间, $T:\ X\longrightarrow Y$ 是线性算子. 如果 T 将 X 中的每个有界集 M 映成 Y 中的列紧集 (相对紧集) $T(M)$, 即 $T(M)$ 的闭包 $\overline{T(M)}$ 是紧集, 则称 T 为 **紧线性算子**, 简称为紧算子. 从 X 到 Y 的紧线性算子全体, 记作 $K(X,Y)$. 当 $X=Y$ 时, 记作 $K(X)$.

注

(1) 线性算子 $T:\ X\longrightarrow Y$ 是紧的, 当且仅当 T 将 X 中的单位球 $B(0,1)=\{x\in X:\ \|x\|<1\}$ 映成 Y 中的列紧集;

(2) 线性算子 $T:\ X\longrightarrow Y$ 是紧的, 当且仅当对于 X 中的任意有界点列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, 点列 $\{Tx_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 Y 中必定有收敛的子列.

定理 6.14 设 X、Y 和 Z 都是赋范线性空间, 那么

(1) 紧算子是连续的;

(2) 设 $T\in B(X,Y)$, $S\in B(Y,Z)$. 如果 T, S 中有一个是紧算子, 则 ST 也是紧算子;

(3) 如果 T、$S\in K(X,Y)$, α, $\beta\in\mathbf{C}$, 则 $\alpha T+\beta S\in K(X,Y)$, 等价地说 $K(X,Y)$ 是 $B(X,Y)$ 中的线性子空间, 特别地, 当 Y 是 Banach 时, 如果紧算子点列 $\{T_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset K(X,Y)$ 按算子范数收敛于

$T \in B(X, Y)$, 则 T 也是紧算子, 因此 $K(X, Y)$ 是 $B(X, Y)$ 的闭子空间. 因此, $K(X, Y)$ 是一个 Banach 空间;

(4) 如果 $T \in K(X, Y)$, 则 T 的值域 $R(T)$ 是可分的;

(5) 如果 $T \in B(X, Y)$ 而且 $\dim R(T) < +\infty$, 则 $T \in K(X, Y)$;

(6) 如果 $\dim X < +\infty$, $T \in B(X, Y)$, 则 $T \in K(X, Y)$;

(7) 设 $T \in K(X, Y)$, 假定 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 X 中弱收敛的点列, 也就是说 $x_n \xrightarrow{w} x$ $(n \to +\infty)$, 则 $\{T x_n\}$ 在 Y 中是强收敛的, 而且极限为 $y = T x$;

(8) 如果 $T \in K(X, Y)$, 则 T 的对偶算子 T^* 也是紧算子.

证明 (1) 设 $T \in K(X, Y)$, 因 X 的单位球面 $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ 是有界的, 故 $\overline{T(S)}$ 是紧的. 因而 $\overline{T(S)}$ 是有界的, 所以 $\sup\limits_{\|x\|=1} \|T x\| < +\infty$. 因此, T 是有界的, 故 T 是连续的.

(2) 因为有界线性算子把有界集映为有界集, 把 (相对) 紧集映为 (相对) 紧集.

(3) 仅需证明紧算子点列 $\{T_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset K(X, Y)$ 按算子范数收敛于 $T \in B(X, Y)$ 时, 有 $T \in K(X, Y)$. 设 M 是 X 的任一有界集. 因为 $\|T_n - T\| \longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$, 从而对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 n_0, 使得对一切 $x \in M$, 有 $\|T_{n_0} x - T x\| < \varepsilon/2$. 因为 T_{n_0} 是紧算子, 因此 $T_{n_0}(M)$ 是 Y 中的列紧集, 从而 $T_{n_0}(M)$ 是全有界的. 对 $T_{n_0}(M)$ 取有限的 $\varepsilon/2$ 网 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, 则

$$T(M) \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k, \varepsilon).$$

所以 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 是 $T(M)$ 的一个有限的 ε 网, 这就说明 $T(M)$ 是列紧的, 故 T 为紧算子.

(4) 设 $B(0,n) = \{x \in X : \|x\| < n\}\,(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $B(0,n)$ 是有界的, 因此, $T B(0,n)$ 是列紧的, 但列紧集是可分的, 故 $T B(0,n)$ 是可分的. 由于任一 $x \in X$ 的范数都是有限的, 故对于充分大的自然数 n_0 来说, 就会有 $\|x\| < n_0$. 因此 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B(0,n)$, T 的值域 $R(T) = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} T[B(0,n)]$ 是可分的

(5) 因为 $T \in B(X,Y)$, 于是 $T[B(0,1)]$ 有界. 又因为 $\dim R(T) < +\infty$, 所以 $T[B(0,1)]$ 是列紧的. 故 $T \in K(X,Y)$.

(6) 因为 $\dim X < +\infty$, $T \in B(X,Y)$, 所以 $\dim R(T) < \dim X < +\infty$. 由 (5) 可知 $T \in K(X,Y)$.

(7) 和 (8) 的证明从略.

例 6.15 定义在赋范线性空间 X 上的连续线性泛函 $f \in X^*$ 是紧的.

证明 这是因为 f 的值域是有限维的.

例 6.16 设 $K(t,s)$ 在 $a \le t \le b$, $a \le s \le b$ 上连续, 定义算子 T: $C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$ 为

$$(Tx)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s, \quad \forall x(t) \in C([a,b]), \ \forall t \in [a,b].$$

则 T 是紧算子.

证明 设 M 是 $C([a,b])$ 中的有界集, 于是, 存在常数 $C > 0$, 使得对于任意的 $x \in M$, 都有 $\|x\| \le C$. 于是

$$\begin{aligned} |(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| &\le \int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,|x(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\le C\int_a^b |K(t_1,s) - K(t_2,s)|\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由于在 $a \le t \le b$, $a \le s \le b$ 中一致连续, 从而对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 始终存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的 t_1, $t_2 \in [a,b]$, 只要 $|t_1 - t_2| < \delta$, 就有

$$|K(t_1,s) - K(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{C(b-a)}, \qquad \forall s \in [a,b].$$

因此, 对一切 $x \in M$, 都有

$$|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)| < \varepsilon.$$

故 M 的像 $T(M)$ 是等度连续的. 再因为 T 是有界线性算子, 所以 $T(M)$ 是有界的, 由 Arzela-Ascoli 定理可知, $T(M)$ 是 $C([a,b])$ 中的列紧集, 故 T 是紧算子

例 6.17 对于每一个 $x = \{\xi_k\} \in l^2$, 定义 $Tx := y$, 其中 $y = \{\eta_k\}$, $\eta_k = \xi_k/k$, $k = 1, 2, \cdots$, 则 T: $l^2 \longrightarrow l^2$ 且 T 是一个紧算子.

证明 T 显然是线性算子. 若 $x = \{\xi_k\} \in l^2$, 则 $y = \{\eta_k\} \in l^2$. 现定义算子 T_n: $l^2 \longrightarrow l^2$ 如下: $T_n x = \{\xi_1, \xi_2/2, \cdots, \xi_n/n, 0, 0, \cdots\}$. 容易验证, 对于每一个 n, T_n 是线性算子. 因为 T_n 的值域是有限维的, 因此由定理 6.14(5) 知 T_n 是紧算子. 此外, 由于

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)x\|^2 &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\eta_k|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}|\xi_k|^2 \\ &\le \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\xi_k|^2 \le \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}, \end{aligned}$$

对所有范数等于 1 的 x 取上确界，便得到 $\|T-T_n\| \le 1/(n+1)$，因此，$T_n \longrightarrow T\ (n \to +\infty)$。根据定理 6.14(3) 便知 T 是紧算子。

下面这些结论是 Riesz-Schauder 理论中关于紧算子的特征值和特征向量空间部分的结果。

定理 6.18 (Riesz-Schauder 理论)　设 X 是复 Banach 空间，$T: X \longrightarrow X$ 为紧算子，则

(1) T 的非零谱点必是特征值；

(2) 若 $\dim X = +\infty$，则 $0 \in \sigma(T)$；

(3) $\sigma(T)$ 的极限点只可能是 0；

(4) 对于任意的 $\lambda \neq 0$，令 $T_\lambda = \lambda I - T$，则 T_λ 的零空间 $\ker(T_\lambda)$ 是有限维的。对于任意的自然数 n 有

$$\dim \ker(T_\lambda^n) < +\infty,$$

并且还有

$$\{0\} = \ker(T_\lambda^0) \subseteq \ker(T_\lambda^1) \subseteq \ker(T_\lambda^2) \subseteq \cdots.$$

进一步，还存在一个自然数 $k_0 \ge 1$ (依赖于 λ)，使得

$$\ker(T_\lambda^0) \subset \ker(T_\lambda) \subset \cdots \subset \ker(T_\lambda^{k_0}) = \ker(T_\lambda^k)\ (k \ge k_0),$$

$$R(T_\lambda) \supset R(T_\lambda^2) \supset \cdots \supset R(T_\lambda^{k_0}) = R(T_\lambda^k)\ (k \ge k_0);$$

(5) 当 $\lambda \in \sigma(T)$，而且 $\lambda \neq 0$ 时，必定存在自然数 $n_0 \ge 1$ 使得

$$X = \ker(T_\lambda^{n_0}) \oplus R(T_\lambda^{n_0}),$$

其中 $\oplus$ 表示直和，并且值域 $R(T_\lambda^{n_0})$ 为闭线性子空间。

注　对于无穷维复 Banach 空间上的紧算子 T，$\sigma(T)$ 有三种可能性：(1) $\sigma(T) = \{0\}$；(2) $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$；(3) $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots\}$，其中 $\lambda_n \to 0$。

设 X 是赋范线性空间，X^* 是 X 的对偶空间，对于 $x \in X$、$f \in X^*$，如果 $\langle f, x\rangle = f(x) = 0$，则称 x 和 f 是相互**正交的**，记作 $x \perp f$。

下面的结论是 Riesz-Schauder 理论中涉及紧算子 T 与 T^* 之间的关系以及与紧算子有关的算子方程的可解性问题。

定理 6.19 (Riesz-Schauder 理论)　设 X 是复 Banach 空间，$T \in K(X)$，则

(1) $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

(2) $\sigma(T)$ ($\sigma(T^*)$) 或者是有限集或者是以 0 为聚点的可列集, $\sigma(T)$ 中任一不为 0 的数都是 T 及 T^* 的特征值. 当 X 为无限维时, 则 0 一定属于 $\sigma(T)$ 及 $\sigma(T^*)$.

(3) T 及 T^* 对应于同一非零特征值的特征向量空间有相同的维数并且维数有限.

(4) T 与 T^* 对应于不同特征值的特征向量空间相互正交.

(5) 设 $\lambda \neq 0$ 是任一复数, 则 λ 是 T 的正则值, 当且仅当下列两性质之一成立

(i) $\lambda I - T$ 是单映射;

(ii) $\lambda I - T$ 是满映射.

(6) 设 $\lambda \neq 0$ 是 T 的特征值, 则方程

$$(\lambda I - T)\,x = y,$$

有解, 当且仅当 y 与 $\lambda I^* - T^*$ 的零空间正交, 而方程

$$(\lambda I^* - T^*)\,f = g,$$

有解, 当且仅当 g 与 $\lambda I - T$ 的零空间正交.

§6.3 Fredholm 算子

设 X 是一个线性空间, M 为 X 中的一个线性子空间, 对于 x, $y \in X$, 当 $x - y \in M$ 时, 则称 x 与 y 关于 M**等价**. 记为 $x \equiv y(M)$, 把 X 中的元按这种等价关系分成等价类, 包含元 x 的等价类记作 $[x]$, 所有这种等价类的集合记作 X/M, 称为 X 按照 M 的**商空间**. 在商空间 X/M 中以自然的方式引进加法与标量乘法:

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x + y], \quad \forall x,\ y \in X, \\ \alpha\,[x] &= [\alpha x], \quad \forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

于是 X/M 形成线性空间. 在 X/M 中定义范数:

$$\|\,[x]\,\| = \inf\{\,\|x - m\|:\ \ m \in M\,\} = \inf\{\,\|y\|:\ \ y \equiv x\,(M)\,\}.$$

如果 X 是 Banach 空间，M 为 X 的闭子空间，则 X/M 也是 Banach 空间.

定义 6.20 设 X 和 Y 都是 Banach 空间，$T \in B(X,Y)$. 如果下述三条成立：

(1) $R(T)$ 在 Y 中闭；

(2) $\alpha(T) = \dim\ker(T) < +\infty$;

(3) 商空间 $Y/R(T)$ 是有限维的，也就是 $\beta(T) = \dim(Y/R(T)) < +\infty$，

则称 T 是 **Fredholm 算子**. $B(X,Y)$ 中一切 Fredholm 算子的全体记作 $F(X,Y)$. 特别地，当 $X = Y$ 时，将 $F(X,X)$ 简单记作 $F(X)$. 若 $T \in F(X,Y)$，定义 $\mathrm{ind}(T) := \alpha(T) - \beta(T)$，称其为 T 的 **指标**.

例 6.21 设 $X = Y = l^2$，$T: X \longrightarrow Y$ 是左平移算子，也就是

$$Tx = (x_2, x_3, \cdots), \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in X.$$

(1) 因为 $R(T) = l^2 = X$，所以 $R(T)$ 是闭的；

(2) 由于 $\ker(T) = \{(x, 0, \cdots) : x \in \mathbf{C}\}$，所以 $\alpha(T) = \dim\ker(T) = 1$;

(3) 因为 $Y/R(T) = \{0\}$，因此 $\beta(T) = 0$. 故 T 是 Fredholm 算子，而且 $\mathrm{ind}(T) = 1$.

同理可以说明 T^* 是右平移算子，也就是

$$T^*x = (0, x_1, x_2, \cdots), \quad \forall x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2,$$

因此 $T^* \in F(l^2)$，而且 $\mathrm{ind}(T^*) = -1$.

一般地，$T^n \in F(l^2)$，$\mathrm{ind}(T^n) = n\ (n = 1, 2, \cdots)$，以及 $(T^*)^n \in F(l^2)$，$\mathrm{ind}((T^*)^n) = -n\ (n = 1, 2, \cdots)$.

定理 6.22 设 X 是 Banach 空间，$T \in K(X)$，I 是 X 上的恒等算子，则 $I + T$ 是 Fredholm 算子，而且

$$\mathrm{ind}(I + T) = 0.$$

我们将基本结果引述如下.

定理 6.23

(1) Fredholm 算子 T 的对偶算子 T^* 也是 Fredholm 算子；

(2) 设 X 和 Y 都是 Banach 空间，$T \in B(X, Y)$，那么 T 是 Fredholm 算子，当且仅当存在 $A_1 \in K(X)$，$A_2 \in K(Y)$，以及 B_1，$B_2 \in B(Y, X)$，

使得

$$B_1T = I + A_1, \qquad TB_2 = I + A_2;$$

(3) 设 X、Y 和 Z 都是 Banach 空间，$T_1 \in B(X, Y)$，$T_2 \in B(Y, Z)$ 都是 Fredholm 算子，则 $T_2T_1 \in B(X, Z)$ 也是 Fredholm 算子，而且

$$\operatorname{ind}(T_2T_1) = \operatorname{ind}(T_2) + \operatorname{ind}(T_1);$$

(4) 设 X 和 Y 都是 Banach 空间，$T \in B(X, Y)$ 为 Fredholm 算子，$A \in K(X, Y)$，则 $T + A$ 仍是 Fredholm 算子，而且

$$\operatorname{ind}(T + A) = \operatorname{ind}(T);$$

(5) 设 X 和 Y 都是 Banach 空间，$T \in B(X, Y)$ 为 Fredholm 算子，则存在 $\varepsilon > 0$，当 $A \in B(X, Y)$，而且 $\|A\| < \varepsilon$ 时，$T + A$ 仍是 Fredholm 算子，而且

$$\operatorname{ind}(T + A) = \operatorname{ind}(T).$$

计算 Fredholm 算子的指标对于确定算子方程的能解性有重要的理论和应用价值.

例 6.24 设有单输入输出线性定常系统，其开环输出为

$$f(t) = \int_0^{+\infty} h(t)\,u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0, \tag{6.3.1}$$

其中 $h(t) \in L^1(-\infty, +\infty)$ 是系统的脉冲响应函数，$u(t) \in L^2([0, +\infty))$ 是系统的输入函数. 积分算子 K：$L^2([0, +\infty)) \longrightarrow L^2([0, +\infty))$，

$$f(t) - (Ku)(t) = \int_0^{+\infty} h(t)\,u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0, \tag{6.3.2}$$

称为 Wiener-Hopf 型积分算子. 可以证明 $T = I + K$ 是一个 Fredholm 算子，而且还可以证明

$$\operatorname{ind}(T) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \arg(1 + \widehat{h}(\omega))\,\mathrm{d}\omega, \tag{6.3.3}$$

其中 $\widehat{h}(\omega)$ 是 $h(t)$ 的 Fourier 变换，也就是

$$\widehat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} h(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \omega \in \mathbf{C}.$$

令 $\Phi(\omega)=1+\widehat{h}(\omega)$, $\arg\Phi(\omega)$ 表示 $\Phi(\omega)$ 的幅角, 则式 (6.3.3) 右边的积分实际上表示当 ω 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时, 函数 $\Phi(\omega)$ 在复平面 $\mathbf{C}$ 上绕原点的圈数.

在控制理论中, 这个结果可以用来判定反馈系统的稳定性. 在反馈系统中, 设 v 是参考输入, u 是误差, 则

$$u(t)=v(t)-y(t)=v(t)-(K\,u)(t),\qquad t\geq 0,\tag{6.3.4}$$

或者写为

$$v(\cdot)=(I+K)\,u(\cdot)=T\,u(\cdot).\tag{6.3.5}$$

闭环系统的稳定性取决于算子 T 是否有有界逆算子. 对于实际系统, $h(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上以指数衰减的某个连续函数, 可以证明 $\alpha(T)=0$, 于是, 系统的稳定性归结为判定

$$\beta(T)=-\mathrm{ind}(T)=0,$$

是否成立的问题. 根据 (6.3.3), 这就相当于当 ω 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化时, $\Phi(\omega)=1+\widehat{h}(\omega)$ 在复平面上的轨迹不绕过原点, 这就是著名的 Nyquist 判定法.

例 6.25 考虑 Fredholm 积分方程

$$\lambda\,x(t)-\int_a^b K(t,\ s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s=v(t),\ \ t\in[a,b],\tag{6.3.6}$$

其中 $x,\ v\in X=L^2([a,b])$, $\lambda\in\mathbf{C}$, 而 $K(t,\ s)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续, 定义算子 T: $X\longrightarrow X$,

$$(T\,x)(t)=\int_a^b K(t,\ s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s,\ \ t\in[a,\ b],$$

则 T 是紧算子. 对于积分方程 (6.3.6), 可以用算子方程表示为

$$(\lambda\,I-T)\,x=v.\tag{6.3.7}$$

因为 T 是紧算子, 则 $T_\lambda=\lambda\,I-T$ 是 Fredholm 算子. 如果 $\lambda\in\rho(T)$, 则方程有唯一解

$$x=(\lambda\,I-T)^{-1}v.$$

如果 $\lambda \in \sigma(T)$, 而且 $\lambda \neq 0$, 则 $\lambda \in \sigma_p(T)$ 为特征值. 由 Fredholm 算子的定义知, $\alpha(T_\lambda) = \dim\ker(T_\lambda) - n < +\infty$. 无妨设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 $\ker(T_\lambda)$ 中的一组线性无关的向量, 则对于任意的 $\hat{x} \in \ker(T_\lambda)$, 有

$$\hat{x} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k, \qquad \alpha_k \in \mathbf{C}, \ k = 1, 2, \cdots, n.$$

此时, 根据能解条件, 为了使方程 (6.3.7) 有解, 当且仅当 $v \in R(T_\lambda) = \ker(T_\lambda)^\perp$. 而且当 x_0 是方程式 (6.3.7) 的任一特解时, 则其他解可以表示为

$$x = x_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k, \qquad \alpha_k \in \mathbf{C}, \ k = 1, 2, \cdots, n.$$

§6.4 自伴算子

下面我们将系统研究 Hilbert 空间上几类特殊的有界线性算子.

定理 6.26 设 X, Y 都是 Hilbert 空间, $T \in B(X, Y)$, 则存在唯一的算子 $T^* \in B(Y, X)$, 满足

$$\langle Tx, y\rangle_Y = \langle x, T^* y\rangle_X, \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

证明 对任意固定的 $y \in Y$, 定义 X 上的线性泛函 $\varphi_y: X \to \mathbf{F}$, $\varphi_y(x) := \langle Tx, y\rangle$, 容易验证 φ_y 是线性的, 而且

$$|\varphi_y(x)| \leq \|Tx\|\|y\| \leq \|T\|\|x\|\|y\|.$$

故 φ_y 是 X 上的有界线性泛函, $\|\varphi_y\| \leq \|T\|\|y\|$. 由 Riesz 表现定理知, 存在唯一的元素 $U\varphi_y \in X$, 使得对于任意的 $x \in X$,

$$\langle Tx, y\rangle = \varphi_y(x) = \langle x, U\varphi_y\rangle.$$

由于 $U\varphi_y$ 由 φ_y 唯一确定, φ_y 由 y 唯一确定, 故 $U\varphi_y$ 由 y 唯一确定, 记作 T^*y, 则 T^* 是 Y 到 X 中的算子, 并且对于任意的 $x \in X$, $y \in Y$, 有 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$.

现在证明 $T^* \in B(Y, X)$. 设 $y_1, y_2 \in Y$, $\alpha, \beta \in \mathbf{F}$, 于是有

$$\begin{aligned}\langle x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)\rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + \beta y_2\rangle = \bar{\alpha}\langle Tx, y_1\rangle + \bar{\beta}\langle Tx, y_2\rangle \\ &= \bar{\alpha}\langle x, T^* y_1\rangle + \bar{\beta}\langle x, T^* y_2\rangle \\ &= \langle x, \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2\rangle.\end{aligned}$$

由 x 的任意性，得到 $T^*(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T^*y_1+\beta T^*y_2$. 这就说明 T^* 是线性算子. 又因为对于任意的 $x\in X$, $y\in Y$, 有

$$|\langle x,T^*y\rangle|=|\langle Tx,y\rangle|\le\|Tx\|\|y\|\le\|T\|\|x\|\|y\|.$$

若取 $x=T^*y\in X$, 就会有

$$\|T^*y\|^2\le\|T\|\|T^*y\|\|y\|.$$

当 $T^*y\ne 0$ 时，$\|T^*y\|\le\|T\|\|y\|$, $T^*y=0$ 时显然成立，所以上式对所有的 $y\in Y$ 成立，故 $T^*\in B(Y,X)$, 而且 $\|T^*\|\le\|T\|$.

下面证明 T^* 的唯一性. 如果还有算子 T_1^*: $Y\longrightarrow X$, 使得对于任意的 $x\in X$, $y\in Y$, 有

$$\langle x,T_1^*y\rangle=\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,$$

则由 x 的任意性知，$T_1^*y=T^*y$, 故 $T^*=T_1^*$.

由以上定理，可得出以下的定义.

定义 6.27 设 X, Y 都是 Hilbert 空间，$T\in B(X,Y)$, 满足

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,\quad\forall x\in X,\ \forall y\in Y$$

的唯一的算子 T^* 称为算子 T 的**伴随算子**. 此外，若 $T=T^*$, 则称 T 是**自伴算子**. 若 $TT^*=T^*T$, 则称 T 为**正规算子**. 若 $T=T^*=T^2$, 则称 T 为**投影算子**.

注 在本书中，对于 $T\in B(X,Y)$, 当 X, Y 都是赋范线性空间时，T^* 是指 T 的对偶算子. 当 X, Y 都是 Hilbert 空间时，T^* 是指 T 的伴随算子. 根据上下文容易理解 T^* 的意义. 值得明确的是，本书中的自伴算子都是指有界的自伴算子.

例 6.28 设 T: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是线性算子，对 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^n$, $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^m$, 有

$$y=Tx=Ax=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_m\end{bmatrix}.$$

矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是 T 的表示矩阵. 若内积用矩阵乘法表示，就会有

$$\langle Ax,y\rangle=(Ax)^{\mathrm T}y=x^{\mathrm T}A^{\mathrm T}y,\ \ \langle x,A^*y\rangle=x^{\mathrm T}A^*y,$$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \Longleftrightarrow x^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} y = x^{\mathrm{T}} A^* y, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n, \quad x \in \mathbf{R}^m.$$

其中 A^* 是 T^* 的表示矩阵，所以 $A^* = A^{\mathrm{T}}$，故 T 的伴随算子的表示矩阵恰好是 T 的表示矩阵的转置矩阵.

当 T 是由 $\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^n$ 的线性算子时，$A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}}$，即 T 的伴随算子 T^* 用 T 的表示矩阵 A 的复共轭转置矩阵 $\overline{A}^{\mathrm{T}}$ 来表示. 因此可以得到：(1) 设 $T:\ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ 是线性算子，则 T 是自伴算子，当且仅当 T 的表示矩阵是对称的；(2) 设 $T:\ \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$ 是线性算子，则 T 是自伴算子，当且仅当 T 的表示矩阵是 Hermite 矩阵.

例 6.29 设 $T:\ L^2([a,b]) \longrightarrow L^2([a,b])$ 是以 $K(x,y)$ 为核的线性积分算子，定义为

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y, \quad \forall f \in L^2([a,b]).$$

则

$$(T^* f)(x) = \int_a^b \overline{K(y,x)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

证明 对于任意的 $f,\ g \in L^2([a,b])$，因为

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= \left\langle \int_a^b K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y, g(x)\right\rangle \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y\right] \overline{g(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \int_a^b K(x,y) f(y) \overline{g(x)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f(y) \left[\int_a^b K(x,y) \overline{g(x)}\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y \\
&= \int_a^b f(y) \overline{\left[\int_a^b \overline{K(x,y)} g(x)\,\mathrm{d}x\right]}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b f(x) \overline{\left[\int_a^b \overline{K(y,x)} g(y)\,\mathrm{d}y\right]}\,\mathrm{d}x \\
&= \left\langle f, \int_a^b \overline{K(y,x)} g(y)\,\mathrm{d}y\right\rangle = \langle f, T^* g\rangle,
\end{aligned}$$

所以，

$$(T^* g)(x) = \int_a^b \overline{K(y,x)} g(y)\,\mathrm{d}y, \quad \forall g \in L^2([a,b]),$$

注　当 $L^2([a,\ b])$ 为实值函数空间时，上式不必取复共轭.

Hilbert 空间中的伴随算子具有下述性质.

定理 6.30　设 X, Y 和 Z 都是 Hilbert 空间. 如果 T、$S \in B(X,\ Y)$，$\alpha \in \mathbf{F}$，则

(1) $I^* = I$;

(2) $(T+S)^* = T^* + S^*$;

(3) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$;

(4) $T^{**} = (T^*)^* = T$;

(5) 如果 T 可逆，而且 $T^{-1} \in B(Y,\ X)$ 为其逆，则 T^* 可逆，而且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. 如果 $T \in B(X,\ Y)$，$S \in B(Y,\ Z)$，则 $(ST)^* = T^* S^*$;

(6) $\|T\| = \|T^*\| = \|T^*T\|^{1/2}$.

证明

(1) 明显成立.

(2) 对于任意的 $x \in X$，$y \in Y$，有

$$\begin{aligned}\langle x, (T+S)^* y\rangle &= \langle (T+S)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle \\ &= \langle x, T^* y\rangle + \langle x, S^* y\rangle = \langle x, (T^* + S^*) y\rangle\end{aligned}$$

由 x 的任意性得到，$(T+S)^* y = (T^* + S^*) y$. 由于 y 的任意性，就会有 $(T+S)^* = (T^* + S^*)$.

(3) 对于任意的 $x \in X, y \in Y, \alpha \in \mathbf{F}$，因为

$$\langle x, (\alpha T)^* y\rangle = \langle \alpha T x, y\rangle = \alpha \langle x, T^* y\rangle = \langle x, \overline{\alpha} T^* y\rangle,$$

所以，$(\alpha T)^* y = \overline{\alpha} T^* y$，这就推得 $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.

(4) 因为 $\langle y, (T^*)^* x\rangle = \langle T^* y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$. 所以 $(T^*)^* = T$.

(5) 由 T 可逆知，$TT^{-1} = I_Y$，$T^{-1}T = I_X$. 对于任意的 y，$y' \in Y$，则有

$$\langle y, (T^{-1})^* T^* y'\rangle = \langle T^{-1} y, T^* y'\rangle = \langle TT^{-1} y, y'\rangle = \langle y, y'\rangle.$$

所以，$(T^{-1})^* T^* y' = y'$，$(T^{-1})^* T^* = I_Y$. 又对于任意的 x，$x' \in X$，有

$$\langle x, T^* (T^{-1})^* x'\rangle = \langle Tx, (T^{-1})^* x'\rangle = \langle T^{-1} Tx, x'\rangle = \langle x, x'\rangle.$$

所以，$T^* (T^{-1})^* x' = x'$，$T^* (T^{-1})^* = I_X$. 因此 T^* 有逆，而且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. 由 Banach 逆算子定理可以知道 T^{-1} 存在时必定是有界的，故

$(T^{-1})^*$ 也有界, 因而 $(T^*)^{-1}$ 有界. 由于 $T \in B(X,Y)$, $S \in B(Y,Z)$, 从而有

$$ST \in B(X,Z),\ (ST)^* \in B(Z,X).$$

进而, 对于任意的 $x \in X, z \in Z$ 有

$$\langle x,(ST)^* z\rangle = \langle STx, z\rangle = \langle Tx, S^* z\rangle = \langle x, T^* S^* z\rangle.$$

由于 x、z 的任意性, 故 $(ST)^* = T^* S^*$.

(6) 对于任意的 $x \in X$, $\|x\| \le 1$, 我们有 $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \le \|T^*Tx\|\|x\| \le \|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\|$. 所以, $\|T\|^2 \le \|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\|$. 从而, $\|T\| \le \|T^*\|$. 但是 $T = T^{**}$. 利用 T^* 代替 T 可以得到 $\|T^*\| \le \|T^{**}\| = \|T\|$. 因此, $\|T\| = \|T^*\|$.

给出下面的定理, 但略去其证明.

定理 6.31

(1) 设 X 是 Hilbert 空间, $T \in B(X)$, $T = T^*$, 则 $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$. 特别地, 若对于任意的 $x \in X$ 有, $\langle Tx, x\rangle = 0$, 则 $T = 0$.

(2) 设 X 是复 Hilbert 空间, $T \in B(X)$.

(i) 若对于任意的 $x \in X$ 有, $\langle Tx, x\rangle = 0$, 则 $T = 0$;

(ii) T 为自伴算子, 当且仅当对于任何 $x \in X$, $\langle Tx, x\rangle$ 为实数.

(3) 设 X, Y 都是 Hilbert 空间, $T \in B(X,Y)$, 则

(i) $R(A)^\perp = \ker(T^*)$;

(ii) $\overline{R(A)} = \ker(T^*)^\perp$;

(iii) $R(T^*)^\perp = \ker(T)$;

(iv) $\overline{R(T^*)} = \ker(T)^\perp$.

定理 6.32 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的自伴算子, 则

(1) T 的特征值都是实数, 并且对应于不同特征值的特征向量互相正交;

(2) 存在点列 $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, 使得对于任意的 $n \in \mathbf{N}$, 满足 $(\lambda I - T)x_n \to 0\,(n \to +\infty)$, 其中 $\lambda = \|T\|$ (或 $-\|T\|$).

证明

(1) 若 $Tx = \lambda x$, $x \ne 0$. 因为

$$\lambda\|x\|^2 = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle = \overline{\lambda}\|x\|^2,$$

所以 $\overline{\lambda} = \lambda$, 这说明 λ 是实数. 再若 $Ty = \mu y$, 而且 $\mu \ne \lambda$, 则

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \overline{\mu}\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

因此，$\langle x, y\rangle = 0$.

(2) 因为 T 是 Hilbert 空间 X 上的自伴算子，从而有

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle|: \quad x \in X, \ \|x\| = 1\}.$$

这就意味着存在点列 $\{y_n\}$, $\|y_n\| = 1$ 满足 $|\langle Ty_n, y_n\rangle| \to \|T\|$. 考虑到点列 $\{\langle Ty_n, y_n\rangle\}$ 是实数，因而存在 $\{y_n\}$ 的子列 $\{x_n\}$，使得 $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \|T\|$ 或 $\langle Tx_n, x_n\rangle \to -\|T\|$. 设 $\lambda = \|T\|$ (或 $-\|T\|$)，使得 $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda \, (n \to +\infty)$. 则

$$\begin{aligned}
\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 &= \|Tx_n\|^2 + \lambda^2 \|x_n\|^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n\rangle \\
&\le \|T\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n\rangle \\
&= 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n\rangle \\
&\to 2\lambda^2 - 2\lambda^2 = 0 \, (n \to +\infty).
\end{aligned}$$

所以，$\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0 \, (n \to +\infty)$.

定理 6.33 设 X 是复 Hilbert 空间，$T \in B(X)$ 为自伴算子. 则 $\sigma(T)$ 是实的，而且

$$\|(\lambda I - T)^{-1} x\| \le \frac{1}{|\mathrm{Im}\,\lambda|} \|x\|, \quad \forall x \in X, \ \lambda \in \mathbf{C}, \ \mathrm{Im}\,\lambda \ne 0.$$

进一步知，$\sigma(T) \subset [m, \ M]$，$m$，$M \in \sigma(T)$，$\sigma_r(T) = \emptyset$，其中 $m = \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$，$M = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$. 特别地，

$$\|T\| = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|.$$

定理 6.34 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的紧自伴算子，则 $\|T\|$ (或 $-\|T\|$) 是 T 的特征值.

证明 当 $T = 0$ 时是平凡的. 假设 $T \ne 0$. 由于 T 是紧的，根据前一定理，$\{x_n\}$ 中存在子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $\{Tx_{n_k}\}$ 收敛，但是 $Tx_{n_k} - \lambda x_{n_k} \to 0$，所以 $\{x_{n_k}\}$ 必定收敛于某个 $x_0 \in X$. 因为 $\|x_{n_k}\| = 1$，我们知道 $\|x_0\| = 1$，因此，方程 $Tx = \lambda x$ 有一个非平凡解，λ 是 T 的特征值.

推论 6.35 假设 T 是 Hilbert 空间 X 上的紧自伴算子，则存在某个特征向量 $x_0 \in X$，使得最大值

$$\max\{|\langle Tx, x\rangle|: \quad x \in X, \ \|x\| = 1\}$$

存在并且等于 $\|T\|$, 进而还知道与特征向量 x_0 所对应的特征值是 $\|T\|$ 或 $-\|T\|$.

对于有限维情形, 自伴算子 T 所对应的矩阵是对称阵 A, 对称矩阵 A 可以通过正交变换对角化, 对角线上的元素对应着 A 的特征值. 这些性质将被推广到无限维的情形.

定理 6.36 (紧自伴算子的谱定理)　设 T 是 Hilbert 空间 X 上的紧自伴算子, $\{\lambda_n\} = \sigma(T) - \{0\}$, $\{\lambda_n\}$ 能够按绝对值从大到小的顺序排列如下: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots$, 而且 $\lambda_n \to 0 (n \to +\infty)$, $\{e_n\}$ 是对应于 $\{\lambda_n\}$ 的特征向量构成的的标准正交系, 则对于任意的 $x \in X$, 有

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

由谱定理可以推知下述择一性定理.

定理 6.37 (择一性定理)　设 T 是 Hilbert 空间 X 上的紧自伴算子. 考虑 X 中的下述方程:

$$(\lambda I - T)x = y.$$

若 $\lambda \neq 0$ 不是 T 的特征值, 那么, 对于任一 $y \in X$, 方程存在唯一的解

$$x = (\lambda I - T)^{-1} y.$$

若 λ 是 T 的特征值, 那么, 方程存在解, 当且仅当 $y \perp \ker(\lambda I - T)$, 在这种情况下, 方程的解具有如下形式:

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k,$$

其中 x_0 是方程的任意一个特解, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是特征空间 $\ker(\lambda I - T)$ 的标准正交基, $\{\alpha_k\}_1^n$ 是任意的复数.

作为谱定理的应用, 我们给出算子值函数 $f(T)$ 的意义.

定理 6.38　设 T 是可分无限维 Hilbert 空间 X 上的紧自伴算子, T 的特征向量 $\{e_n\}$ 构成了 X 的标准正交基, 与 $\{e_n\}$ 相对应的实特征值为 $\{\lambda_n\}$. 假设函数 $f: \sigma(T) \to \mathbf{C}$ 使得极限 $\lim_n f(\lambda_n)$ 存在, 则算子

$$f(T)x = \sum_{n=1}^{+\infty} f(\lambda_n) \langle x, e_n \rangle e_n,$$

有定义，并且当 $\lim\limits_n f(\lambda_n)=0$ 时，$f(T)$ 是紧的. 当 f 是实值函数时，$f(T)$ 是自伴的.

证明　由于极限 $\lim\limits_n f(\lambda_n)$ 存在，可以令 $\lim\limits_n f(\lambda_n)=c$, 记 $\varphi=f-c$, 则有 $\varphi(\lambda_n)\to 0\,(n\to+\infty)$, 所以，算子

$$\varphi(T)\,x=\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi(\lambda_n)\,\langle x,e_n\rangle\,e_n,$$

有定义，并且是紧的. 由于

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}f(\lambda_n)\,\langle x,e_n\rangle\,e_n &= \sum_{n=1}^{k}\varphi(\lambda_n)\,\langle x,e_n\rangle\,e_n+c\sum_{n=1}^{k}\langle x,e_n\rangle\,e_n\\ &\to \varphi(T)\,x+c\,I\,x\,(k\to+\infty),\end{aligned}$$

对于任意的 $x\in H$, $f(T)\,x=\varphi(T)\,x+c\,I\,x$ 有定义. 又因为

$$f(T)^*\,x=\sum_{n=1}^{+\infty}\overline{f(\lambda_n)}\,\langle x,e_n\rangle\,e_n,$$

因此，若 f 是实函数，则 $f(T)$ 是自伴的.

定义 6.39　设 X 是 Hilbert 空间，$\{P_\lambda\}\,(-\infty<\lambda<+\infty)$ 是空间 X 上的一族投影算子，而且满足下面的条件：

(1) 对于任意的 $-\infty<\lambda\le\mu<+\infty$ 和 $x\in X$, 有

$$\langle P_\lambda\,x,x\rangle\le\langle P_\mu\,x,x\rangle.$$

(2) P_λ 关于 λ 在算子强收敛意义下右连续，也就是说，对于任意的 $\lambda_0\in(-\infty,+\infty)$ 和 $x\in X$, 有

$$\|\,P_\lambda\,x-P_{\lambda_0}\,x\,\|\longrightarrow 0\,(\lambda\to\lambda_0^+).$$

(3) 对于任意的 $x\in X$, 有

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\|\,P_\lambda\,x\,\|=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\|\,P_\lambda\,x-x\,\|=0.$$

则称投影算子族 $\{P_\lambda:\ \lambda\in(-\infty,+\infty)\}$ 构成空间 X 中的一个 **谱族或谱系**. 如果 $\{P_\lambda:\ \lambda\in(-\infty,+\infty)\}$ 是空间 X 中的一个谱族，而且存在实数

$a<b$. 使得当 $\lambda<a$ 时，$P_\lambda=\theta$. 当 $b\le\lambda$ 时，$P_\lambda=I$. 则称 $\{P_\lambda\}$ **为区间** $[a,\ b]$ **上的谱族**．

定义 6.40　设 $\{P_\lambda\}$ 是在区间 $[a,\ b]$($-\infty<a<b<+\infty$) 上的谱族，$f(\lambda)$ 是区间 $[a,\ b]$ 上的连续函数，对区间 $[a,\ b]$ 的任一划分 Δ：$a=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_n=b$. 记 $d(\Delta)=\max\limits_{1\le k\le n}|\lambda_k-\lambda_{k-1}|$，作空间 $B(X)$ 中的和式

$$S(\Delta)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)(P_{\lambda_k}-P_{\lambda_{k-1}}),\quad \xi_k\in[\lambda_{k-1},\lambda_k],$$

如果存在 X 上的有界线性算子 T. 使得对于任给的 $\varepsilon>0$, 始终存在 $\delta>0$, 当划分 Δ 满足 $d(\Delta)<\delta$ 时，不论 ξ_k 如何选取，在空间 $B(X)$ 中总有

$$\|S(\Delta)-T\|<\varepsilon.$$

则称算子 T 是 $f(\lambda)$ 对于谱族 $\{P_\lambda\}$ 的 **谱积分**. 记为

$$T=\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}P_\lambda.$$

如果 $\{P_\lambda\}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的谱族，$f(\lambda)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，$f(\lambda)$ 对谱族 $\{P_\lambda\}$ 的谱积分定义为 (若存在时)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\lambda)\,\mathrm{d}P_\lambda=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}f(\lambda)\,\mathrm{d}P_\lambda,$$

其中上式的极限在空间 $B(X)$ 中依算子范数进行.

定理 6.41(自伴算子的谱分解定理)　设 X 是 Hilbert 空间，T 是 X 上的自伴算子，则存在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的谱族 $\{P_\lambda\}$ 使得

$$T=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\,\mathrm{d}P_\lambda,$$

其中右端的积分是指谱积分，它依算子范数收敛.

注　定理 6.41 中的谱分解公式将自伴算子表示成投影算子的无限线性组合，但投影算子是非常简单，而且是容易处理的一类算子，因此谱分解定理具有重要的理论价值，它对于研究自伴算子是一个有力的工具

下面给出紧自伴算子的谱分解定理.

定理 6.42 (紧自伴算子的谱分解定理) 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的紧自伴算子，$\{\lambda_n\}=\sigma(T)-\{0\}$，$\{\lambda_n\}$ 能够按绝对值从大到小的顺序排列如下：$|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots$，而且 $\lambda_n\to 0(n\to+\infty)$，$P_n$ 是 T 对应于 λ_n 的特征向量空间上的投影算子，则 T 可以表示成下列级数的和：

$$T=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n P_n.$$

其中上式右端的级数在算子强收敛意义下收敛.

注　定理 6.42 和定理 6.36 是紧自伴算子谱定理的两种形式.

§6.5　正 算 子

设 X 是一个 Hilbert 空间，$T\in B(X)$ 是自伴算子. 若对于任意的 $x\in X$，恒有 $\langle Tx,x\rangle\geq 0$，则称 T 是**正算子**，记作 $T\geq 0$. 若 $T,S\in B(X)$ 是自伴算子，而且 $T-S\geq 0$，则约定 $T\geq S$.

有关正算子的性质和结论收集在下面的定理中，而略去其证明.

定理 6.43　设 X 是一个 Hilbert 空间，$T,S,T_1,T_2,\cdots,S_1,S_2,\cdots\in B(X)$ 是自伴算子，则

(1) $T\leq T$;

(2) 若 $T\leq T_1, T_1\leq T_2$，则有 $T\leq T_2$;

(3) 若 $T\leq S$, $S\leq T$，则有 $T=S$;

(4) 若 $T_1\leq S_1, T_2\leq S_2$，则有 $T_1+T_2\leq S_1+S_2$;

(5) 若 $T\leq S$, $\alpha\geq 0$，则有 $\alpha T\leq \alpha S$;

(6) 若 $T_n\leq S_n, n=1,2,\cdots$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}T_n\leq \lim\limits_{n\to+\infty}S_n$，其中极限是指按算子强收敛;

(7) 若两个正算子 T 和 S 可以交换 ($TS=ST$)，则 TS 是正的;

(8) 若 T 是正的紧算子，则存在唯一的正紧算子 A，使得 $A^2=T$;

(9) 如果 T 是复 Hilbert 空间 X 上的正算子，则存在唯一的正算子 $A\in B(X)$，使得 $A^2=T$(A 称为 T 的 **正平方根**). 特别地，若 $S\in B(X)$ 与 T 可换，则 S 也与 A 可换;

(10) 若 $\{T_n\}$ 是单调增加算子点列且以 S 为上界，即

$$T_1\leq T_2\leq\cdots\leq T_n\leq\cdots\leq S,$$

则 $\{T_n\}$ 强收敛于某个自伴算子 A, 而且 $A \le S$. 若 $\{T_n\}$ 是单调减少算子点列且以 S 为下界, 则 $\{T_n\}$ 强收敛于某个自伴算子 A, 而且 $A \ge S$.

定理 6.44 设算子 T 是 Hilbert 空间 X 上的正算子, 则存在正数 λ_0 和区间 $[\lambda_0, +\infty)$ 上的谱族 $\{P_\lambda\}$ 使得

$$T = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d} P_\lambda.$$

此外, 对任意实数 α, 定义算子 T 的分数幂 T^α 为

$$T^\alpha = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^\alpha \, \mathrm{d} P_\lambda.$$

则 T^α 也是正算子.

例 6.45 设 T 是 Hilbert 空间 X 上紧的正算子, X 的标准正交基 $\{e_n\}$ 由 T 的特征向量构成, 与 $\{e_n\}$ 相对应的正特征值是 $\{\lambda_n\}$. 我们定义如下的算子:

$$\sqrt{T}\, x = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_n} \, \langle x, e_n \rangle \, e_n.$$

根据定理 6.38, 算子 $\sqrt{T}$ 是紧自伴算子. 下面说明 $(\sqrt{T})^2 = T$. 对于任意的 $x \in X$, 我们有

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{T}\right)^2 x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_n} \left\langle \sqrt{T}\, x, e_n \right\rangle e_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_n} \left\langle \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_k} \, \langle x, e_k \rangle \, e_k, e_n \right\rangle e_n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{\lambda_n} \right)^2 \langle x, e_n \rangle \, e_n \\
&= T x.
\end{aligned}$$

所以, $(\sqrt{T})^2 = T$.

例 6.46 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的紧自伴算子, H 的标准正交基 $\{e_n\}$ 由 T 的特征向量构成, 与 $\{e_n\}$ 相对应的特征值是 $\{\lambda_n\}$. 将 T 的谱 $\sigma(T)$ 分解成两个不相交的部分 $\sigma_1 = \{\lambda_{n_1}\}$ 和 $\sigma_2 = \{\lambda_{n_2}\}$, 也就是

$$\sigma(T) = \{\lambda_n\} = \{\lambda_{n_1}\} \cup \{\lambda_{n_2}\} = \sigma_1 \cup \sigma_2.$$

我们在 $\sigma(T)$ 上定义如下的两个函数 χ_1 和 χ_2,

$$\chi_1(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\in\sigma_1,\\ 0, & \lambda\in\sigma_2.\end{cases}\qquad \chi_2(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\in\sigma_2,\\ 0, & \lambda\in\sigma_1.\end{cases}$$

也就是说 χ_1 和 χ_2 为集合 σ_1 和 σ_2 的特征函数. 算子 $\chi_1(T)$ 和 $\chi_2(T)$ 为

$$\chi_1(T)x=\sum_{n=1}^{+\infty}\chi_1(\lambda_n)\langle x,e_n\rangle e_n=\sum_{n_1}\langle x,e_{n_1}\rangle e_{n_1},$$

$$\chi_2(T)x=\sum_{n=1}^{+\infty}\chi_2(\lambda_n)\langle x,e_n\rangle e_n=\sum_{n_2}\langle x,e_{n_2}\rangle e_{n_2}.$$

令 $H_1=\mathrm{span}\{e_{n_1}\}$ 和 $H_2=\mathrm{span}\{e_{n_2}\}$, 那么 $\chi_1(T)$ 和 $\chi_2(T)$ 是 H_1 和 H_2 上的正交投影. 由于 H_1 和 H_2 正交, 所以 $\chi_1(T)\chi_2(T)=0$, 但由于 $\{e_n\}$ 是 H 的一个基, 因此 $\chi_1(T)+\chi_2(T)=I$, 这就说明 T 的谱分解对应于 Hilbert 空间 H 的一个正交分解, 即

$$H=\chi_1(T)(H)\oplus\chi_2(T)(H).$$

注 这一点在系统的稳定性分析和控制工程中是很重要的.

§6.6 Hilbert-Schmidt 算子

定义 6.47 设 X 是一个可分 Hilbert 空间, T 是 X 到其自身的线性算子, $\{e_n\}$ 是 X 的一个标准正交基. 如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\|Te_n\|^2<+\infty$, 则称 T 为 **Hilbert-Schmidt 算子**. X 上的全体 Hilbert-Schmidt 算子构成的集合记作 $B_2(X)$. 对于 $T\in B_2(X)$, 令

$$\|T\|_2:=\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\|Te_n\|^2\right)^{1/2},$$

把 $\|T\|_2$ 称为 T 的 **Hilbert-Schmidt 算子范数**.

定理 6.48 设 X 是一个可分 Hilbert 空间, $T:\ X\to X$ 是一个线性算子, 则

(1) T 是 Hilbert-Schmidt 算子, 当且仅当 T^* 是一个 Hilbert-Schmidt 算子;

(2) $B_2(X) \subset B(X)$.

(3) Hilbert-Schmidt 范数确实是 $B_2(X)$ 上的范数，而且 Hilbert-Schmidt 算子范数不依赖于 X 中标准正交基的选择；

(4) 若 $T \in B_2(X), S \in B(X)$，则 $TS, ST \in B_2(X)$，而且 $\|TS\|_2 \leq \|T\|_2\|S\|$，$\|ST\|_2 \leq \|S\|\|T\|_2$.

证明

(1) 因为

$$\begin{aligned}\|T\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}\|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}|\langle Te_n, e_m\rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}|\langle e_n, T^*e_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{+\infty}\|T^*e_m\|^2 = \|T^*\|_2^2.\end{aligned}$$

所以结论成立.

(2) 任取 $T \in B_2(X)$. 对于任意的 $x \in X$，$\|x\| = 1$，有

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}|\langle Tx, e_n\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}|\langle x, T^*e_n\rangle|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\|T^*e_n\|^2 = \|T^*\|_2^2 = \|T\|_2^2.\end{aligned}$$

因此，$\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\| \leq \|T\|_2$. 故 $B_2(X) \subset B(X)$.

(3) 设 $\{\epsilon_n\}$ 是 X 的另一个标准正交基，则

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\|T\epsilon_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}|\langle T\epsilon_n, e_m\rangle|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}|\langle \epsilon_n, T^*e_m\rangle|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\|T^*e_m\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\|Te_n\|^2.\end{aligned}$$

此即说明 Hilbert-Schmidt 算子范数不依赖于标准正交基的选择.

(4) 设 $T \in B_2(X), S \in B(X)$，因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\|TSe_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}\|S^*T^*e_n\|^2 \\ &\leq \|S\|^2\sum_{n=1}^{+\infty}\|T^*e_n\|^2 = \|S\|^2\|T^*\|_2^2,\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|STe_n\|^2\le\|S\|^2\sum_{n=1}^{+\infty}\|Te_n\|^2=\|S\|^2\|T\|_2^2.$$

因此，$TS, ST\in B_2(X)$. 而且 $\|TS\|_2<\|T\|_2\|S\|$，$\|ST\|_2\le\|S\|\|T\|_2$.

定义 6.49 设 X 是一个可分 Hilbert 空间，$T, S\in B_2(X)$. $\{e_n\}$ 为 X 的一个标准正交基. 定义

$$\langle T, S\rangle_2:=\sum_{n=1}^{+\infty}\langle Te_n, Se_n\rangle.$$

称 $\langle T,S\rangle_2$ 为 T 和 S 的 **Hilbert-Schmidt 内积**. 此定义与 X 中标准正交基的选择无关.

下面仅给出有关结论，而略去其证明.

定理 6.50 设 X 是一个可分 Hilbert 空间，$FR(X)$ 是 X 上全体有限秩算子的集合，$K(X)$ 是 X 上全体紧算子的集合. 则

(1) $(B_2(X), \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ 是一个 Hilbert 空间;

(2) $FR(X)\subset B_2(X)$. 而且在 Hilbert-Schmidt 算子范数下，$FR(X)$ 在 $B_2(X)$ 中稠密;

(3) $B_2(X)\subset K(X)$;

(4) $T:\ X\to X$ 是一个 Hilbert-Schmidt 算子，当且仅当 T 是紧算子，而且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^2<+\infty$. 其中 $\{\lambda_n\}$ 是正的紧算子 $(T^*T)^{1/2}$ 的全体特征值. 此时有 $\|T\|_2=\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lambda_n^2\right)^{1/2}$.

定义 6.51 设 E 是 $\mathbf{R}$ 上的有限或无限的区间，k 是 $E\times E$ 上的二元函数，以 k 为核的 **积分算子** 定义为

$$(Ku)(x)=\int_E k(x,t)\,u(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \forall x\in E,\ \ u\in L^2(E).$$

若 $k\in L^2(E\times E)$, 即

$$\|k\|^2=\int_E\int_E|k(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t<+\infty,$$

则 $L^2(E)$ 上以 k 为积分核的积分算子 K 称为 **Hilbert-Schmidt 积分算子**. 对于满足条件 $k(x,t)=\overline{k(t,x)}$ 的核 $k(x,t)$ 称为 **对称核**.

注 积分算子由积分核唯一确定，即如果对于任意的 $u\in L^2(E)$, 有

$$\int_E k(x,t)\,u(t)\,\mathrm{d}t=\int_E h(x,t)\,u(t)\,\mathrm{d}t,$$

则 $k = h$.

定理 6.52　Hilbert-Schmidt 积分算子 K 是有界的且 $\|K\| \le \|k\|$.

定义 6.53　设 $f, g \in L^2(E)$, 定义 f 与 g 的张量积 $f \otimes g$ 为

$$(f \otimes g)(x, y) = f(x) g(y), \qquad \forall (x, y) \in E \times E.$$

则 $f \otimes g \in L^2(E \times E)$.

定理 6.54　若 $\{e_n\}$ 是 $L^2(E)$ 的标准正交基, 则 $\{e_m \otimes \overline{e_n}\}$ 是 $L^2(E \times E)$ 的标准正交基.

证明　因为

$$\begin{aligned}
\langle e_j \otimes \overline{e_k}, e_m \otimes \overline{e_n} \rangle &= \int_E \int_E e_j(x) \overline{e_k(t)} \overline{e_m(x) \overline{e_n(t)}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&= \int_E e_j(x) \overline{e_m(x)} \, \mathrm{d}x \int_E e_n(t) \overline{e_k(t)} \, \mathrm{d}t \\
&= \langle e_j, e_m \rangle \langle e_n, e_k \rangle = \delta_{jm} \delta_{kn},
\end{aligned}$$

所以 $\{e_m \otimes \overline{e_n}\}$ 是一个标准正交系. 下面说明它是一个标准正交基. 假设 $k \in L^2(E \times E)$ 使得对于任意的自然数 m, n 有: $\langle k, e_m \otimes \overline{e_n} \rangle = 0$, 则对于任意的自然数 m, n, 我们有

$$\begin{aligned}
0 &= \int_E \int_E k(x, t) \overline{e_m(x) \overline{e_n(t)}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \\
&= \int_E \left[\int_E k(x, t) e_n(t) \, \mathrm{d}t \right] \overline{e_m(x)} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_E (K e_n)(x) \overline{e_m(x)} \, \mathrm{d}x = \langle K e_n, e_m \rangle,
\end{aligned}$$

其中 K 是具有积分核 k 的积分算子. 由于 $\{e_m\}$ 是一个标准正交基, 从而对于任意的 $n \in \mathbf{N}$, $K e_n = 0$. 因此, K 是零算子. 又因为 Hilbert-Schmidt 算子由它的积分核唯一确定, 故 $k = 0$, 这就说明 $\{e_m \otimes \overline{e_n}\}$ 是 $L^2(E \times E)$ 的标准正交基.

定理 6.55　Hilbert-Schmidt 积分算子是紧算子.

证明　设 $k \in L^2(E \times E)$ 是 Hilbert-Schmidt 算子的积分核, 则

$$k = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \langle k, e_m \otimes \overline{e_n} \rangle e_m \otimes \overline{e_n},$$

而且 $\|K\| \leq \|k\|$. 令

$$g_{MN} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\langle k, e_m \otimes \overline{e_n}\rangle e_m \otimes \overline{e_n},$$

那么以 g_{MN} 为积分核的有限秩算子 G_{MN} 按算子范数收敛于 K. 所以 K 是紧算子.

定理 6.56 $K: L^2(E) \to L^2(E)$ 是 $L^2(E)$ 上的 Hilbert-Schmidt 算子, 当且仅当 K 是 $L^2(E)$ 上的 Hilbert-Schmidt 积分算子. 等价地说, 若 K 是 $L^2(E)$ 上的 Hilbert-Schmidt 积分算子和 $\{e_n\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交基, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|K e_n\|^2 < +\infty.$$

另一方面, 若 $K \in B(L^2(E))$ 使得对于 $L^2(E)$ 的某个标准正交基 $\{e_n\}$ 满足

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|K e_n\|^2 < +\infty,$$

那么 K 是 Hilbert-Schmidt 积分算子.

证明 设 $\{e_n\}$ 是 $L^2(E)$ 的标准正交基, 从而能够构成 $L^2(E \times E)$ 的标准正交基 $\{e_m \otimes \overline{e_n}\}$. 如果 K 有界, 根据 Parseval 等式可得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|K e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}|\langle K e_n, e_m\rangle|^2.$$

若 $k \in L^2(E \times E)$, 直接计算得到 $\langle k, e_m \otimes \overline{e_n}\rangle = \langle K e_n, e_m\rangle$. 因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\|K e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}|\langle k, e_m \otimes \overline{e_n}\rangle|^2 = \|k\|^2 < +\infty.$$

另一方面, 若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\|K e_n\|^2 < +\infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}|\langle k, e_m \otimes \overline{e_n}\rangle|^2 < +\infty,$$

所以, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\langle K e_n, e_m\rangle e_m \otimes \overline{e_n}$ 在 $L^2(E \times E)$ 中收敛到某个 k 使得 k 具有 Fourier 系数 $\langle k, e_m \otimes e_n\rangle = \langle K e_n, e_m\rangle$. 故 K 是一个具有积分核 k 的 Hilbert-Schmidt 算子.

注 此定理表明映射 $\varphi: k \to K$ 是 $L^2(E\times E)$ 到 $B_2(L^2(E))$ 的一个等距同构映射，即对于空间 $L^2(E)$ 上的任一 Hilbert-Schmidt 算子 K，一定存在 $k\in L^2(E\times E)$，使得 K 有如下的积分表示

$$(Ku)(x)=\int_E k(x,t)\,u(t)\,\mathrm{d}t.$$

定理 6.57 (Hilbert-Schmidt) 设 K 是 $L^2(E)$ 中具有对称核的 Hilbert-Schmidt 算子，$\{e_n\}$ 是 K 的所有非零特征值 $\{\lambda_n\}$ 所对应的特征函数构成的标准正交系，$\{\lambda_n\}$ 能够按照绝对值从大到小排列 $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\cdots$，而且 $\lambda_n\to 0\,(n\to+\infty)$. 则

$$Ku=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\langle u,e_n\rangle e_n,\qquad \forall u\in L^2(E).$$

注 若 $\{\lambda_n\}$ 在某一自然数 n_0 之后全为零，则 0 就是特征值，当然也有 $\lambda_n\to 0\,(n\to+\infty)$.

例 6.58 设 $H=L^2([0,1])$，考虑具有积分核 $k(x,t)=x\,t$ 的积分算子 K. 由于积分核是对称核，所以 K 是自伴的. 再由于对任一 $u\in H$，都有

$$(Ku)(x)=\int_0^1 x\,t\,u(t)\,\mathrm{d}t=\left(\int_0^1 t\,u(t)\,\mathrm{d}t\right)x.$$

因此，K 是 1 秩算子和 $K(H)$ 是由函数 $I(x)=x$ 生成的 1 维子空间. 又因为

$$\|I\|^2=\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

这表明 $\varphi_1(x)=\sqrt{3}\,x$ 是一个标准特征函数. 用 K 去作用可以得到

$$\begin{aligned}(K\varphi_1)(x)&=\int_0^1 t\,\varphi_1(t)\,\mathrm{d}t\cdot x=\int_0^1 t\,\varphi_1(t)\,\mathrm{d}t\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\varphi_1(x)\\&=\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t\cdot\varphi_1(x)=\frac{1}{3}\cdot\varphi_1(x).\end{aligned}$$

所以 $\lambda=1/3$ 是唯一的非零特征值，因此，我们得到

$$\sigma(K)=\sigma_p(K)=\left\{0,\frac{1}{3}\right\},$$

和

$$Ku=\frac{1}{3}\langle u,\varphi_1\rangle\varphi_1,\qquad \forall u\in H.$$

又由于 $\pm\|K\|$ 中之一必定是特征值，所以 $\|K\|=1/3$.

§6.7 酉 算 子

定义 6.59 设 X 是 Hilbert 空间, 如果 $T \in B(X)$ 满足下列两个条件.

(1) T 是等距的, 即对任一 $x \in X$, 有 $\|Tx\| = \|x\|$;

(2) T 是满映射. 则称 T 为 **酉算子**.

定理 6.60 设 X 是 Hilbert 空间, $T \in B(X)$, 则

(1) 如果 T 为酉算子, 则 $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$;

(2) T 为酉算子, 当且仅当 $T^*T = TT^* = I$;

(3) 如果 T 是 Hilbert 空间 X 上的自伴算子. 令

$$\widehat{T} = (T - \mathrm{i}I)(T + \mathrm{i}I)^{-1}, \tag{6.7.1}$$

则 $\widehat{T}$ 是酉算子, $1 \notin \sigma(\widehat{T})$ 而且 $T = \mathrm{i}(I + \widehat{T})(I - \widehat{T})^{-1}$;

(4) 如果 $\widehat{T}$ 为酉算子, 而且 $1 \notin \sigma(\widehat{T})$. 令

$$T = \mathrm{i}(I + \widehat{T})(I - \widehat{T})^{-1}, \tag{6.7.2}$$

则 T 为自伴算子.

证明

(1) 当 X 为实 Hilbert 空间时, 有

$$\begin{aligned}\langle Tx, Ty\rangle &= \frac{1}{4}\left[\langle T(x+y), T(x+y)\rangle - \langle T(x-y), T(x-y)\rangle\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\right] = \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

当 X 为复 Hilbert 空间时, 有

$$\begin{aligned}\langle Tx, Ty\rangle &= \frac{1}{4}\left[\langle T(x+y), T(x+y)\rangle - \langle T(x-y), T(x-y)\rangle\right] \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{4}\left[\langle T(x+\mathrm{i}y), T(x+\mathrm{i}y)\rangle - \langle T(x-\mathrm{i}y), T(x-\mathrm{i}y)\rangle\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle\right] \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}}{4}\left[\langle x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y\rangle - \langle x-\mathrm{i}y, x-\mathrm{i}y\rangle\right] \\ &= \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

(2) 充分性的证明. 由于 $T^*T=I$, 对任一 $x\in X$, 有

$$\|Tx\|^2=\langle Tx,Tx\rangle=\langle T^*Tx,x\rangle=\langle x,x\rangle=\|x\|^2.$$

又由 $TT^*=I$ 可知, T 是一个满映射, 所以 T 是酉算子.

必要性的证明. 设 T 是酉算子. 对任意的 $x, y\in X$, 有 $\langle T^*Tx,y\rangle=\langle x,y\rangle$, 所以对任一 $x\in X$, 我们有 $T^*Tx=x$. 于是 $T^*T=I$. 由酉算子的定义可知, T 有有界逆算子 T^{-1}. 因为 $T^*=T^*(TT^{-1})=(T^*T)T^{-1}=T^{-1}$, 从而有 $T^*=T^{-1}$. 因此, $TT^*=TT^{-1}=I$.

(3) 因为 $\pm\mathrm{i}\in\rho(T)$, 所以 $(T\pm\mathrm{i}I)^{-1}\in B(X)$. 因而, $\widehat{T}$ 是 X 上的有界线性算子. 任取 $x\in X$, 则

$$\begin{aligned}\|(T\pm\mathrm{i}I)x\|^2&=\|Tx\|^2\pm\mathrm{i}\langle x,Tx\rangle\mp\mathrm{i}\langle Tx,x\rangle+\langle x,x\rangle\\&=\|Tx\|^2+\|x\|^2.\end{aligned}$$

因此, $\|(T-\mathrm{i}I)x\|=\|(T+\mathrm{i}I)x\|$. 若令 $y=(T+\mathrm{i}I)^{-1}x$, 则有

$$\begin{aligned}\|\widehat{T}x\|^2&=\langle Ty-\mathrm{i}y,Ty-\mathrm{i}y\rangle=\langle Ty+\mathrm{i}y,Ty+\mathrm{i}y\rangle\\&=\|(T+\mathrm{i}I)y\|^2=\|x\|^2.\end{aligned}$$

故 $\widehat{T}$ 是等距的. 由 (6.7.1) 可知 $\widehat{T}(T+\mathrm{i}I)x=(T-\mathrm{i}I)x$, 所以 $\widehat{T}$ 将 $T+\mathrm{i}I$ 的值域映成 $T-\mathrm{i}I$ 的值域. 因为 T 是自伴的, $\pm\mathrm{i}$ 都是 T 的正则值, 故 $T\pm\mathrm{i}I$ 的值域都是空间 X, 也就是说 $\widehat{T}$ 是满映射, 所以 $\widehat{T}$ 是酉算子.

保持 x, y 的意义, 由 $x=(T+\mathrm{i}I)y$, $\widehat{T}x=(T-\mathrm{i}I)y$ 得到

$$(I+\widehat{T})x=2Ty,\quad (I-\widehat{T})x=2\mathrm{i}y.$$

因为若 $(I-\widehat{T})x=0$, 则 $y=0$, 进而 $x=0$. 故 $1\notin\sigma_p(\widehat{T})$, 从而 $(I-\widehat{T})^{-1}$ 定义于 $R(I-\widehat{T})=R((T+\mathrm{i}I)^{-1})=D(T)$ 上, 并且有

$$\begin{aligned}Ty&=\tfrac{1}{2}(I+\widehat{T})(I-\widehat{T})^{-1}(2\mathrm{i}y)\\&=\mathrm{i}(I+\widehat{T})(I-\widehat{T})^{-1}y.\end{aligned}$$

(4) 容易验证 T 是 X 上的有界线性算子. 因为

$$\begin{aligned}T^*&=-\mathrm{i}(I-\widehat{T}^*)^{-1}(I+\widehat{T}^*)\\&=-\mathrm{i}(I-\widehat{T}^{-1})^{-1}(I+\widehat{T}^{-1})\\&=-\mathrm{i}(\widehat{T}-I)^{-1}(\widehat{T}+I)=T,\end{aligned}$$

所以 T 是自伴算子.

定理 6.61 (Plancherel) 对于任何的 $x \in L^2(-\infty, +\infty)$, 令

$$(Tx)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} x(t)\, dt, \tag{6.7.3}$$

$$(\widehat{T}x)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} x(\omega)\, d\omega. \tag{6.7.4}$$

则 T, $\widehat{T}$ 都是酉算子并且 $T^* = \widehat{T}$.

注 (6.7.3) 称为 $x \in L^2(-\infty, +\infty)$ 的 Fourier 变换, 而 (6.7.4) 称为 $x \in L^2(-\infty, +\infty)$ 的 Fourier 逆变换, 并且有 $\sigma(T) = \{1, -1, i, -i\}$.

定理 6.62 设 X 为复 Hilbert 空间, T 为 X 上的酉算子, 则存在 $[0, 2\pi]$ 上的谱族 $\{P_\lambda\}$ 满足 $P_0 = \theta$, 并且使得

$$T = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda}\, dP_\lambda.$$

此外, 凡是与 T 可以交换的算子均与 $P_\lambda\,(0 \le \lambda \le 2\pi)$ 可以交换.

例 6.63 考虑 Volterra 积分方程

$$\lambda x(t) - \int_a^t K(t, s)\, x(s)\, ds = v(t), \quad t \in [a, b], \tag{6.7.5}$$

其中 x, $v \in X = C([a, b])$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $K(t, s)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 可测, 并且满足 $\sup\limits_{a<t,s\le b} |K(t, s)| = M < +\infty$. 当给定 λ 和 v 时, 方程是否有解并且唯一?

下面利用有界线性算子谱理论进行研究. 定义算子 T: $X \longrightarrow X$ 为

$$(Tx)(t) = \int_a^t K(t, s)\, x(s)\, ds, \quad t \in [a, b].$$

因为

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_{t\in[a,b]} |(Tx)(t)| = \sup_{t\in[a,b]} \left| \int_a^t K(t, s)\, x(s)\, ds \right| \\ &\le (b-a) M \|x\|, \end{aligned}$$

所以 $T \in B(X)$, 定义 T^n: $X \longrightarrow X$ 为

$$(T^n x)(t) = \int_a^t K_n(t, s)\, x(s)\, ds, \quad t \in [a, b].$$

其中对于任意的自然数 n, $K_n(t,\ s)$ 定义为

$$K_n(t,\ s)=\begin{cases}\displaystyle\int_a^b K(t,\ r)K_{n-1}(r,\ s)\,\mathrm{d}\,r, & a\le s\le t\le b,\\ 0. & \text{其他}.\end{cases}$$

其次，我们归纳地证明

$$\int_a^t |K_n(t,\ s)|\,\mathrm{d}\,s\le \frac{M^n\,(t-a)^n}{n!}. \tag{6.7.6}$$

因为

$$\int_a^t |K_1(t,\ s)|\,\mathrm{d}\,s\le M\,(t-a),$$

而假设 (6.7.6) 成立，则

$$\begin{aligned}\int_a^t |K_{n+1}(t,s)|\,\mathrm{d}\,s &= \int_a^t\left|\int_a^t K(t,r)\,K_n(r,s)\,\mathrm{d}\,r\right|\mathrm{d}\,s\\ &< \int_a^t \mathrm{d}\,s\int_a^t |K(t,r)|\,|K_n(r,s)|\,\mathrm{d}\,r\\ &= \int_a^t \mathrm{d}\,r\int_a^t |K(t,r)|\,|K_n(r,s)|\,\mathrm{d}\,s\\ &< M\int_a^t \frac{M^n\,(r-a)^n}{n!}\,\mathrm{d}\,r=\frac{M^{n+1}\,(t-a)^{n+1}}{(n+1)!},\end{aligned}$$

所以 (6.7.6) 成立，从而有

$$\begin{aligned}\|T^n\| &= \sup_{\|x\|=1}\|T^n x\|=\sup_{\|x\|=1}\sup_{t\in[a,b]}\left|\int_a^t K_n(t,\ s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s\right|\\ &< \sup_{t\in[a,b]}\int_a^t \left|K_n(t,\ s)\right|\mathrm{d}\,s\le \frac{M^n\,(b-a)^n}{n!}.\end{aligned}$$

由谱半径定理 6.11 知，T 的谱半径为

$$r_\sigma(T)=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}<\lim_{n\to+\infty}\frac{M\,(b-a)}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

因此，$\lambda=0$ 是 T 的唯一谱点，$\lambda\ne 0$ 都是 T 的正则值. 积分方程 (6.7.5) 可以写为

$$(\lambda I-T)\,x=v.$$

当 $\lambda \neq 0$ 时，T_λ 有有界逆，并且由定理 6.6 知

$$R(\lambda;T)=(\lambda I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}.$$

所以，方程 (6.7.5) 有唯一解 $x=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}v$.

第七章　Banach 空间上的微积分

§7.1　Banach 空间上的 Bochner 积分

将通常勒贝格积分的概念推广到Banach空间中,初步体会Hahn-Banach定理、共鸣定理等结果的应用.

在本节中, 设 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个有限测度空间, X 为 Banach 空间.

定义 7.1　设 $f: \Omega \to X$. 如果存在 $x_k \in X, E_k \in \mathcal{B}, k = 1, 2, \cdots, n$ 并且对于任意的 $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, 使得

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{E_k}(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

其中 χ_{E_k} 表示 E_k 的特征函数, 则称 f 为 **简单函数**.

定义 7.2　设 $f: \Omega \to X$. 如果存在一列简单函数 $\{f_k\}$ 使得在 Ω 上几乎处处有

$$\lim_{k \to +\infty} \|f_k(x) - f(x)\| = 0,$$

则称 f 是 **强可测函数**.

如果 f, g 强可测, α, β 是标量, 则 $\alpha f + \beta g$ 也强可测. 如果 $\{f_k\}$ 是强可测函数, 则 $f = \lim_{k \to +\infty} f_k$ 也是强可测的.

下面给出 Bochner 积分的定义.

定义 7.3

(1) 设 $f: \Omega \to X$ 为简单函数, 则 f 的 **Bochner 积分** 定义为

$$\int_E f(t) \,\mathrm{d}\,\mu(t) := \sum_{k=1}^{n} x_k \mu(E \cap E_k), \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

(2) 如果 $f: \Omega \to X$ 是强可测函数, 简单函数列 $\{f_k\}$ 几乎处处强收敛于 f, 则 f 的 **Bochner 积分** 定义为

$$\int_E f(t) \,\mathrm{d}\,\mu(t) := \lim_{k \to +\infty} \int_E f_k(t) \,\mathrm{d}\,\mu(t), \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

注 (2) 的定义是合理的. 容易证明 $\left\{\int_E f_k(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t)\right\}$ 是基本点列而且 $\int_E f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t)$ 与几乎处处强收敛于 f 的简单函数列 $\{f_k\}$ 的选取无关. 若 f 强可测, 则 f 为 Bochner 可积, 当且仅当 $\|f\|$ 是可积的.

Bochner 积分具有与通常勒贝格积分类似的若干性质. 设 $B(\Omega, X, \mu)$ 表示由有限测度空间 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 到 Banach 空间 X 的 Bochner 可积函数全体构成的集合, 则 $B(\Omega, X, \mu)$ 也是一个 Banach 空间, 其上的范数定义为

$$\|f\|_1 := \int_\Omega \|f(t)\|\,\mathrm{d}\,\mu(t).$$

其中对零测度集上取值不同的两个函数不加区别.

类似地, 对于 $p > 1$ 可以定义 $B^p(\Omega, X, \mu)$. 其中的元 $f:\ \Omega \to X$ 是强可测的, 并且使得 $\int_\Omega \|f(t)\|^p\,\mathrm{d}\,\mu(t) < +\infty$. $B^p(\Omega, X, \mu)$ 中的范数定义为

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega \|f(t)\|^p\,\mathrm{d}\,\mu(t)\right)^{1/p},$$

其中对零测度集上取值不同的两个函数不加区别, 则 $B^p(\Omega, X, \mu)$ 也是 Banach 空间. 特别地, 当 $p = 2$ 和 X 是一个 Hilbert 空间时, $B^2(\Omega, X, \mu)$ 是一个 Hilbert 空间, 其中的内积定义为

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega \langle f(t), g(t)\rangle\,\mathrm{d}\,\mu(t).$$

下面仅给出一些相关结果, 但略去其证明.

定理 7.4

(1) 设 $f, g \in B(\Omega, X, \mu)$. 则对于任意的标量 α, β 有, $\alpha f(t) + \beta g(t) \in B(\Omega, X, \mu)$, 而且对于任意的 $E \in \mathcal{B}$, 有

$$\int_E [\alpha f(t) + \beta g(t)]\,\mathrm{d}\,\mu(t) = \alpha \int_E f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t) + \beta \int_E g(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t).$$

(2) 设 $f, g \in B(\Omega, X, \mu)$. 若 $f(t)$ 和 $g(t)$ 仅仅在零测度集上不同, 则

$$\int_E f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t) = \int_E g(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t), \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

(3) 设 $f \in B(\Omega, X, \mu)$. 则

$$\left\|\int_E f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t)\right\| \le \int_E \|f(t)\|\,\mathrm{d}\,\mu(t), \quad \forall E \in \mathcal{B}.$$

(4) 设 $\{E_k\}$ 是 Ω 中一列两两不相交的可测集，$E=\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k$ 和 $f\in B(\Omega,X,\mu)$，则有

$$\int_E f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{E_k}f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t),$$

其中求和表示强收敛意义下的极限.

(5) 设 $f\in B(\Omega,X,\mu)$，对于任何 $\varepsilon>0$，恒存在 $\delta>0$，当 $E\in\mathcal{B},\mu(E)<\delta$ 时，有

$$\left\|\int_E f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t)\right\|<\varepsilon.$$

(6) 设 X,Y 都是 Banach 空间，T 是 X 到 Y 的闭线性算子. 若 $f\in B(\Omega,X,\mu)$ 而且 $Tf\in B(\Omega,Y,\mu)$，则有

$$T\left[\int_E f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t)\right]=\int_E Tf(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t),\quad \forall E\in\mathcal{B}.$$

特别地，若 $T\in B(X,Y)$，$f\in B(\Omega,X,\mu)$，则 $Tf\in B(\Omega,Y,\mu)$，而且

$$T\left[\int_E f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t)\right]=\int_E Tf(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t),\quad \forall E\in\mathcal{B}.$$

定理 7.5 (控制收敛定理) 设 $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ 是有限测度空间，X 是 Banach 空间. 若 $\{f_k\}$ 是 Bochner 可积的，并且对于任意的自然数 k，$\|f_k(t)\|\le F(t)$ a.e.，$\forall t\in\Omega$，其中 $F(t)$ 是 Ω 上的实值勒贝格可积函数而且 $\lim\limits_{k\to+\infty}\|f_n(t)-f(t)\|=0$, a.e. 在 Ω 上，则对于任意的 $E\in\mathcal{B}$，f 在 E 上 Bochner 可积而且

$$\int_E f(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t)=\lim_{k\to+\infty}\int_E f_k(t)\,\mathrm{d}\,\mu(t).$$

定理 7.6 (Fubini 定理) 设 $(\Omega_1,\mathcal{B}_1,\mu_1)$ 和 $(\Omega_2,\mathcal{B}_2,\mu_2)$ 是两个有限测度空间. 记它们的乘积测度空间为 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2,\mu_1\times\mu_2)$. 若 $h(t,s)$ 是 $\Omega_1\times\Omega_2$ 上的 Bochner 可积函数，则

$$f(t)=\int_{\Omega_2}h(t,s)\,\mathrm{d}\,\mu_2(s),\quad g(s)=\int_{\Omega_1}h(t,s)\,\mathrm{d}\,\mu_1(t),$$

分别在 Ω_1 和 Ω_2 上几乎处处有定义，并且有

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2}h(t,s)\mathrm{d}\,\mu_1\times\mu_2&=\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}h(t,s)\,\mathrm{d}\,\mu_2(s)\right]\mathrm{d}\,\mu_1(t)\\&=\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}h(t,s)\,\mathrm{d}\,\mu_1(t)\right]\mathrm{d}\,\mu_2(s).\end{aligned}$$

§7.2 Banach 空间上的微分

Banach 空间上的微分学常常应用于在某些约束条件下对泛函求极值或称为优化问题. 它是泛函分析在自动控制和系统工程中应用的一个重要方面.

本节给出 Banach 空间上微分学的基本框架, 介绍两种最基本的微分. 一种是 Gâteaux 意义下的弱微分, 它是高等数学中方向导数概念的推广. 另一种是 Fréchet 意义下的强微分, 它是全微分概念的推广. 本节将介绍这两种微分概念及其相关性质. 这些内容是无限维空间微分学的基础, 其基本思想是将非线性算子局部线性化, 等价地说就是: 设 X, Y 是实赋范线性空间, U 是 X 的开集, $f: U \to Y, x_0 \in U$. 人们希望能够找到有界线性算子 $T: X \to Y$ 满足

$$f(x) \approx f(x_0) + T(x - x_0),$$

其中 x 接近 x_0.

弱微分的概念定义如下.

定义 7.7 设 X, Y 是实赋范线性空间, U 是 X 中的开集, $f: U \to Y$, $x_0 \in U, h \in X$. 如果极限

$$Df(x_0, h) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

存在, 则称 $Df(x_0, h)$ 为 f 在 x_0 处沿方向 h 的 **弱微分或 Gâteaux 意义下的 G 微分**, 简称为 **弱微分或 G 微分**. 如果 f 在 x_0 处沿任何方向 $h \in X, Df(x_0, h)$ 都存在, 则称 f 在 x_0 处 **弱可微或 G 可微**.

如果 f 在 x_0 处 G 可微, 而且 $Df(x_0, h)$ 关于 h 是有界线性的, 也就是说存在 $Df(x_0) \in B(X, Y)$, 使得

$$Df(x_0, h) = [Df(x_0)]h, \qquad \forall h \in X,$$

其中 $B(X, Y)$ 表示从 X 上到 Y 中的有界线性算子全体构成的赋范线性空间. 此时, 称 f 在 x_0 处 **弱可导或 Gâteaux 意义下 G 可导**, 称 $Df(x_0)$ 为 f 在 x_0 处的 **G 导算子** 或者 **G 导函数**, 简称 G 导算子或者 G 导函数. 如果 f 在 U 上每一点 G 可微, 则称 f 在 U 上 **G 可微**. 如果 f 在 U 上每一点 G 可导, 则称 f 在 U 上 **G 可导**.

例 7.8

(1) 考察 $\mathbf{R}^2$ 上的泛函 f： $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{如果 } x = (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{如果 } x = (x_1, x_2) = (0,0), \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + th) - f(0)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{(th_1)^2 th_2}{(th_1)^2 + (th_2)^2}}{t} \\ &= \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2}, \end{aligned}$$

即 f 在点 $x_0 = (0,0)$ 处沿着 $h = (h_1, h_2)$ 方向的 G 微分为

$$Df(x_0, h) = \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

(2) 考察 $\mathbf{R}^2$ 上的泛函 f： $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$

$$f(x) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{如果 } x = (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{如果 } x = (x_1, x_2) = (0,0), \end{cases}$$

则有

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + th) - f(0)}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{th_1 + th_2 + \dfrac{(th_1)^2 th_2}{(th_1)^2 + (th_2)^2}}{t} \\ &= h_1 + h_2 + \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2}, \end{aligned}$$

即 f 在点 $x_0 = (0,0)$ 处沿着 $h = (h_1, h_2)$ 方向的 G 微分为

$$Df(x_0, h) = h_1 + h_2 + \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2},$$

(3) 考察 $\mathbf{R}^n$ 上的实函数 f： $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$. 设 $\{e_k: \ k = 1, 2, \cdots, n\}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 通常的标准正交基，则 f 在点 x 处沿着 e_k 方向的 G 微分为

$$\begin{aligned} Df(x, e_k) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)}{t} \\ &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

例 7.9 设 H 是实 Hilbert 空间. 考察 H 上的泛函 $f: H\to \mathbf{R}^1$, $f(x)=\|x\|$, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{\|x+th\|-\|x\|}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\|x+th\|^2-\|x\|^2}{t(\|x+th\|+\|x\|)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\langle x+th,x+th\rangle-\langle x,x\rangle}{t(\|x+th\|+\|x\|)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{2\langle x,th\rangle+\langle th,th\rangle}{t(\|x+th\|+\|x\|)}\end{aligned}$$

所以, 当 $x\neq 0$ 时, f 在点 x 处沿着 h 方向的 G 微分为

$$Df(x,h)=\frac{\langle x,h\rangle}{\|x\|}.$$

定理 7.10 设 X, Y 是实赋范线性空间, U 是 X 中的开集, $x_0\in U$, $h\in X$. 令 $L=\{x:\ x=x_0+th, 0\le t\le 1\}$ 且设 $L\subset U$.

(1) 如果泛函 $f: U\to\mathbf{R}^1$ 在 L 上 G 可微, 则存在 $\theta\in(0,1)$, 使中值公式

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Df(x_0+\theta h,h)$$

成立.

(2) 如果算子 $f: U\to Y$ 在 L 上 G 可微, 则存在 $\theta\in(0,1)$, 使下式成立:

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|\le\|Df(x_0+\theta h,h)\|.$$

(3) 如果 Y 是 Banach 空间, $f: U\to Y$ 在 L 上 G 可微. 令 $\psi(t)=Df(x_0+th,h)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^1\psi(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\int_0^1\psi(t)\,\mathrm{d}t$ 是向量值函数 $\psi(t)$ 的 Riemann 积分.

证明 (1) 设 $F(t)=f(x_0+th), 0\le t\le 1$, 则容易看出 F 是 $[0,1]$ 上可微的实函数. 由高等数学中的微分中值定理知, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得 $F(1)-F(0)=F'(\theta)$. 但是 $F'(t)=Df(x_0+th,h)$, 因此, $f(x_0+h)-f(x_0)=Df(x_0+\theta h,h)$.

(2) 由 Hahn-Banach 定理，对 $f(x_0+h)-f(x_0)\in Y$，存在 $y^*\in Y^*$，满足要求 $\|y^*\|=1$，而且 $y^*(f(x_0+h)-f(x_0))=\|f(x_0+h)-f(x_0)\|$. 现在，对泛函 $F(x)=y^*(f(x))$ 利用 (1) 的结论，我们知道存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$F(x_0+h)-F(x_0)=DF(x_0+\theta h,h),$$

注意到 $DF(x,h)=y^*(Df(x,h))$，由上式即得

$$\begin{aligned}\|f(x_0+h)-f(x_0)\| &= y^*[f(x_0+h)-f(x_0)]=F(x_0+h)-F(x_0)\\ &= DF(x_0+\theta h,h)=y^*(Df(x_0+\theta h,h))\\ &\le \|y^*\|\,\|Df(x_0+\theta h,h)\|=\|Df(x_0+\theta h,h)\|.\end{aligned}$$

(3) 对任意的 $y^*\in Y^*$，考察 $\phi(t)=y^*(f(x_0+th))$，根据假定 $\phi(t)=y^*(f(x_0+th))$ 在 $[0,1]$ 上可微，而且 $\phi'(t)=y^*(Df(x_0+th,h))=y^*(\psi(t))$ 在 $[0,1]$ 上关于 t 连续. 由高等数学中微积分基本定理可得

$$\begin{aligned}y^*(f(x_0+h)-f(x_0)) &= \phi(1)-\phi(0)\\ &= \int_0^1\phi'(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 y^*(Df(x_0+th,h))\mathrm{d}t\\ &= y^*\left(\int_0^1 Df(x_0+th,h)\mathrm{d}t\right)=y^*\left(\int_0^1\psi(t)\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

利用 y^* 的任意性和 Hahn-Banach 定理的分离性可得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\int_0^1 Df(x_0+th,h)\mathrm{d}t=\int_0^1\psi(t)\mathrm{d}t.$$

注

(1) 当 f 在 U 上的每一点处具有 G 导算子时，一般来说，Df 是从 U 到 $B(X,Y)$ 的非线性映射.

(2) 当 $Df(x_0)$ 存在时，我们有

$$f(x_0+th)-f(x_0)=Df(x_0)th+w(x_0,h,t),$$

其中当 x_0,h 固定时，

$$\lim_{t\to0}\frac{w(x_0,h,t)}{t}=0.$$

一般情况下，这个极限关于 $\|h\|=1$ 不是一致的.

(3) 定理 7.10(1) 的结论对一般映射不一定成立. 假设 $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $f(z)=e^z$, 将 $\mathbf{C}$ 看成实二维空间. 易见 $Df(z,h)=e^z h$, 取 $x_0=0, h=2\pi i$, 就有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=0,$$

$$Df(x_0+\theta h,h)=e^{2\pi\theta i}\cdot 2\pi i\neq 0,\quad 0\le\theta\le 1,$$

因此

$$f(x_0+h)-f(x_0)\neq Df(x_0+\theta h,h).$$

(4) G 可导并不能蕴涵连续.

例如，泛函 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x_1^3}{x_2}, x_2\neq 0; f(0)=0$. 对于任意的 $h\in\mathbf{R}^2$, 有 $Df(0,h)=0$. 因此，f 在 0 点 G 可导，但 f 在 0 点不连续.

定理 7.11 设 X 是实赋范线性空间，泛函 $f:X\to\mathbf{R}$ 在 x_0 点取得极大值或极小值，而且 f 在 x_0 点 G 可导，则 $Df(x_0)=0$.

例 7.12 考察泛函 $f:C([0,1])\to\mathbf{R}$,

$$f(u)=\int_0^1 (tu(t)+u(t)^2)\,\mathrm{d}t.$$

计算得到

$$Df(u,h)=\int_0^1 (t+2u(t))h(t)\,\mathrm{d}t.$$

因此，对于极小值点 u 一定有

$$Df(u,h)=0,\quad \forall h\in C([0,1]).$$

特别取 $h(t)=t+2u(t)$, 则有 $t+2u(t)=0$. 所以，$u(t)=-\frac{1}{2}t$.

定义 7.13 设 X,Y 是实赋范线性空间，U 是 X 中的开集，$f:U\to Y$. 如果存在有界线性算子 $T\in B(X,Y)$, 使得当 $h\in X, x_0+h\in U$, $h\to 0$ 时，有

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Th+o(\|h\|),$$

其中 $o(\|h\|)$ 意味着

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{o(\|h\|)}{\|h\|}=0,$$

则称 f 在 x_0 处 **F 可微**, 而且称 Th 为 f 在 x_0 处的 **F 微分**, 记作 $\mathrm{d}f(x_0,h)$. 这时称 T 为 f 在 x_0 处的 **F 导算子**, 记作 $df(x_0)$ 或 $f'(x_0)$. 如果 f 在 U

上每一点都 F 可微，就称 f 在 U 上 **F 可微**. 称 f'： $U \to B(X,Y)$ 为 f 的 **F 导映射 (或 F 导函数)**. 若导映射 f' 在点 x_0 处连续，则称算子 f 在点 x_0 处 **连续 F 可微**.

注

(1) 如果 f 在 x_0 处 F 可微，则必定 G 可微，而且

$$Df(x_0,h) = f'(x_0)h.$$

反过来不一定成立.

(2) 设 f 在 x_0 处 F 可微，则 f 在 x_0 处连续，等价地说就是

$$\lim_{\|h\|\to 0} \|f(x_0+h) - f(x_0)\| = 0.$$

例 7.14

(1) 设 X,Y 都是实赋范线性空间，对于任意的 $x \in X$, $f(x) \equiv y_0 \in Y$, 则 $f'(x) \equiv 0$.

(2) 设 X,Y 都是实赋范线性空间 $T \in B(X,Y)$, $f(x) = Tx$, $x \in X$, 则 $f'(x) \equiv T$.

(3) 设 X 是实 Hilbert 空间，$f(x) = \|x\|$, 则当 $x_0 \neq 0$, $h \to 0$ 时有

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &= \|x_0+h\| - \|x_0\| \\ &= \frac{\|x_0+h\|^2 - \|x_0\|^2}{\|x_0+h\| + \|x_0\|} \\ &= \frac{2\langle x_0,h\rangle + \|h\|^2}{\|x_0+h\| + \|x_0\|} \\ &= \langle x_0/\|x_0\|, h\rangle + o(\|h\|). \end{aligned}$$

因为 $X^* = X$, 因此 $f'(x_0) = x_0/\|x_0\|$.

一般地，若 f： $U \subset X \to \mathbf{R}$ 在 $x \in U$ 处 F 可微，则将 $f'(x) \in X^*$ 称为 f 在 x 点的 **梯度**，通常记为 $\nabla f(x)$. 因此，当 X 是实 Hilbert 空间时，有

$$\nabla\|x\| = x/\|x\|, \quad 0 \neq x \in X.$$

(4) 设 X 是实 Hilbert 空间，$T \in B(X)$ 是自伴算子，$f(x) = \langle x, Tx\rangle$ 是由 T 决定的二次泛函，则当 $h \to 0$ 时有

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= \langle T(x_0+h), x_0+h\rangle \\ &= f(x_0) + 2\langle Tx_0, h\rangle + o(\|h\|). \end{aligned}$$

因此，$f'(x_0)=\nabla f(x_0)=2Tx_0$.

例 7.15 设映射 $f:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 定义为

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n),\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m=f_m(x_1,\cdots,x_n),\end{cases}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $y=(y_1,\cdots,y_m)\in\mathbf{R}^m$. 由定义容易知道 f 在 x_0 处 F 可微等价于每个 $f_j:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$ 按高等数学中的意义在 x_0 处可微. 对 $h=(h_1,\cdots,h_n)\in\mathbf{R}^n$,

$$\mathrm{d}f(x_0,h)=(\mathrm{d}f_1(x_0,h),\cdots,\mathrm{d}f_m(x_0,h)).$$

由通常多元函数的微分法有

$$\mathrm{d}f_j(x_0,h)=\frac{\partial f_j(x_0)}{\partial x_1}h_1+\cdots+\frac{\partial f_j(x_0)}{\partial x_n}h_n,$$

从而可得

$$f'(x_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix},$$

这就是相应于 f 的 Jacobi 矩阵.

例 7.16 设 $k=k(t,s,u)$ 和 $\dfrac{\partial k}{\partial u}$ 是定义在 $[0,1]\times[0,1]\times(-\infty,+\infty)$ 上的实值连续函数. 考察 $C([0,1])$ 到自身的积分算子:

$$[f(x)](t)=\int_0^1 k(t,s,x(s))\,\mathrm{d}\,s.$$

证明 f 在 $x_0\in C([0,1])$ 处的 F 微分为:

$$[f'(x_0)]h(t)=\int_0^1\frac{\partial k(t,s,x_0(s))}{\partial u}h(s)\,\mathrm{d}\,s.$$

证明 由于

$$\begin{aligned}&\left|k(t,s,x_0(s)+h(s))-k(t,s,x_0(s))-\frac{\partial k(t,s,x_0(s))}{\partial u}h(s)\right|\\ =&\left|\int_0^1\left[\frac{\partial k(t,s,x_0(s)+\theta h(s))}{\partial u}-\frac{\partial k(t,s,x_0(s))}{\partial u}\right]h(s)\,\mathrm{d}\,\theta\right|\\ \le&\ \|h\|\int_0^1\left|\frac{\partial k(t,s,x_0(s)+\theta h(s))}{\partial u}-\frac{\partial k(t,s,x_0(s))}{\partial u}\right|\mathrm{d}\,\theta,\end{aligned}$$

因为 $\frac{\partial k}{\partial u}$ 在 $[0,1]\times[0,1]\times(-\infty,+\infty)$ 的紧子集上一致连续，故可以知道上式最后一个积分当 $\|h\|\to 0$ 时关于 t,s 一致地趋于 0. 令

$$Th(t)=\int_0^1 \frac{\partial k(t,s,x_0(s))}{\partial u}h(s)\mathrm{d}s,\qquad h\in C([0,1]),$$

即得

$$\begin{aligned}
&\|f(x_0+h)-f(x_0)-Th\|\\
=&\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1\left[k(t,s,x_0(s)+h(s))\right.\right.\\
&\left.\left.-k(t,s,x_0(s))-\frac{\partial k(t,s,x_0(s))}{\partial u}h(s)\right]\mathrm{d}s\right|\\
=&\ o(\|h\|).
\end{aligned}$$

由此可以看出 $f'(x_0)=T$.

定理 7.17　设 X,Y 和 Z 均为实赋范线性空间，$f,g:\ X\to Y$ 在 x 处 F 可微，$h:\ Y\to Z$ 在 $y=f(x)$ 处 F 可微，则

(1) 对任意常数 α,β, $\alpha f+\beta g$ 在 x 处 F 可微，而且

$$(\alpha f+\beta g)'(x)=\alpha f'(x)+\beta g'(x).$$

(2)(链规则) $h\circ f:\ X\to Z$ 在 x 处 F 可微，而且

$$(h\circ f)'(x)=h'(f(x))\circ f'(x).$$

证明　(1) 是明显的. 下面仅证明 (2). 对 $u\in X, v\in Y$, 有

$$f(x+u)-f(x)-[f'(x)]u=w(x,u)=o(\|u\|),$$

$$h(y+v)-h(y)-[h'(y)]v=k(y,v)=o(\|v\|).$$

这意味着有

$$\lim_{\|u\|\to 0}\frac{\|w(x,u)\|}{\|u\|}=\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|k(y,v)\|}{\|v\|}=0.$$

取 $v=[f'(x)]u+w(x,u)$. 由于 $f'(x)$ 线性有界，当 $\|u\|\to 0$ 时，我们便得

到 $\|v\| \to 0$. 于是

$$\begin{aligned}
& (h \circ f)(x+u) - (h \circ f)(x) \\
= \ & h(f(x+u)) - (h \circ f)(x) \\
= \ & h(f(x) + [f'(x)]u + w(x,u)) - h(f(x)) \\
= \ & h(f(x) + v) - h(f(x)) \\
= \ & [h'(f(x))]v + k(y,v) \\
= \ & h'(y) \circ f'(x)u + h'(y)w(x,u) + k(y,v).
\end{aligned}$$

因为 $h'(y)$ 是有界线性的, 从而有 $\|h'(y)w(x,u)\| = o(\|u\|)$. 又由于

$$\begin{aligned}
& \frac{\|k(y,v)\|}{\|u\|} \\
= \ & \frac{\|k(y,v)\|}{\|v\|} \cdot \frac{\|f'(x)u + w(x,u)\|}{\|u\|} \\
\leq \ & \frac{\|k(y,v)\|}{\|v\|} \cdot \left(\|f'(x)\| + \frac{\|w(x,u)\|}{\|u\|}\right) \\
\leq \ & o(1)(\|f'(x)\| + o(1)),
\end{aligned}$$

但因为 $\|f'(x)\|$ 是有限的, 可得

$$\|k(y,v)\| \leq o(\|u\|).$$

因此,

$$h \circ f(x+h) - h \circ f(x) - h'(f(x)) \circ f'(x) = o(\|h\|).$$

由此可以看出, $h \circ f$ 在 x 处 F 可微, 并且其 F 导数为

$$(h \circ f)'(x) = h'(f(x)) \circ f'(x).$$

现在, 我们来指出两种微分概念的关系.

定理 7.18

(1) 设 X, Y 是实赋范线性空间, $f:\ X \to Y$, f 在 x 处 F 可微的充分必要条件是 f 在 x 处 G 可导, 并且极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(x+th) - f(x)] = [Df(x)]h,$$

关于 $\|h\|=1$ 一致地成立. 此时, $f'(x)=Df(x)$.

(2) 设 f 在开集 $U\subset G$ 可导并且映射 $U\to B(X,Y)$: $x\to Df(x), x\in U$, 在 x_0 点连续, 则 f 在 x_0 处 F 可微.

证明 (1) 充分性的证明. 任给 $\varepsilon>0$, 由假设存在与 $\|h\|=1$ 无关的 $\delta>0$, 使得当 $|t|<\delta$ 时, 有

$$\left\|\frac{1}{t}[f(x+th)-f(x)]-[Df(x)]h\right\|<\varepsilon.$$

记 $h_1=th$. 于是, 当 $\|h_1\|<\delta$ 时, 就有

$$\|f(x+h_1)-f(x)-[Df(x)]h_1\|<\varepsilon\|h_1\|.$$

又因为 $Df(x)\in B(X,Y)$, 因此 $f'(x)$ 存在, 而且 $f'(x)=Df(x)$.

必要性的证明 设 f 在 x 处 F 可微, 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\|h_1\|<\delta$ 时

$$\|f(x+h_1)-f(x)-f'(x)h_1\|<\varepsilon\|h_1\|.$$

对于 $\|h\|=1$, 当 $|t|<\delta$ 时, 由以上不等式得

$$\left\|\frac{1}{t}[f(x+th)-f(x)]-f'(x)h\right\|<\varepsilon\|h\|=\varepsilon.$$

从而 $\frac{1}{t}[f(x+th)-f(x)]$ 关于 h 的一致极限为 $f'(x)h$. 显然这就说明 f 在 x 处 F 可导

(2) 任意给定 $\varepsilon>0$. 由 $Df(x)$ 在 x_0 点连续可知, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in U$ 且 $\|x-x_0\|<\delta$ 时, 有

$$\sup_{\|h\|=1}\|Df(x)h-Df(x_0)h\|<\varepsilon.$$

因此, 利用中值定理 (定理 7.10(3)) 知, 当 $|t|<\delta$ 时, 对任何 $\|h\|=1$ 有

$$\begin{aligned}
&\|f(x_0+th)-f(x_0)-Df(x_0)th\|\\
=&\left\|\int_0^1 Df(x_0+sth)th\,\mathrm{d}s-\int_0^1 Df(x_0)th\,\mathrm{d}s\right\|\\
\leq&|t|\int_0^1\|Df(x_0+sth)h-Df(x_0)h\|\mathrm{d}s\\
<&|t|\varepsilon.
\end{aligned}$$

由 (1) 可得, f 在 x_0 点处 F 可微.

下面的例子说明弱可微不一定 F 可微.

例 7.19 考察 $\mathbf{R}^2$ 上的泛函 $f:\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$, 定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} x_1 + x_2 + \dfrac{{x_1}^3 x_2}{{x_1}^4 + {x_2}^2}, & \text{如果 } x = (x_1, x_2) \neq (0,0), \\ 0, & \text{如果 } x = (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

因为

$$\left|\frac{{x_1}^3 x_2}{{x_1}^4 + {x_2}^2}\right| \leq \frac{1}{2}|x_1|,$$

由此可知 f 在 $(0,0)$ 点连续. 令 $h = (h_1, h_2)$. 则在 $(0,0)$ 处沿方向 h 的 G 微分等于

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f(0+th) - f(0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{th_1 + th_2 + \dfrac{(th_1)^3 th_2}{(th_1)^4 + (th_2)^2}}{t} \\ &= h_1 + h_2, \end{aligned}$$

即 f 在点 $x_0 = (0,0)$ 处沿着 $h = (h_1, h_2)$ 方向的 G 微分为

$$Df(x_0, h) = h_1 + h_2,$$

但是, 如果令 $h_2 = h_1^2$. 则有 $\|h\| = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2} = (h_1^2 + h_1^4)^{1/2}$, 因而

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(h) - f(0) - Df(0,h)}{\|h\|} &= \lim_{\|h\|\to 0} \frac{{h_1}^3 h_2}{({h_1}^4 + {h_2}^2)({h_1}^2 + {h_2}^2)^{1/2}} \\ &= \lim_{\|h\|\to 0} \frac{{h_1}^5}{2{h_1}^4({h_1}^2 + {h_1}^4)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0, \end{aligned}$$

从而 f 在 $(0,0)$ 处不是 F 可微的.

§7.3 高阶微分与泰勒公式

在高等数学中, 为了弄清楚函数在某点的局部性质, 需要讨论它在该点的高阶导数. 类似地, 为了更进一步了解非线性映射在某点的局部性态, 我们

需要研究它在该点的高阶导映射 (导算子). 本节主要介绍高阶微分的概念, 并在此基础上来建立泰勒 (Taylor) 公式.

为了定义高阶微分, 首先引入多重线性算子的概念.

设 $X_k, k=1,2,\cdots,n$ 是赋范线性空间, 具有范数 $\|\cdot\|_k, k=1,2,\cdots,n$. 我们用 $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ 来表示 X_k 的乘积空间, 并且在 $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ 上赋予如下范数:

$$\|x\|=\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|_k, \qquad \forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X.$$

则在此范数下 $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ 是赋范线性空间. 又设 Y 是另一个赋范线性空间并且具有范数 $\|\cdot\|_Y$, T: $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to Y$. 如果 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中任意固定其中 $n-1$ 个变元时, T 关于剩下的一个变元是线性的, 即就是说 $T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对每个变元 x_k 都是线性的, 我们就称 T 为 **n 重线性算子**. 如果存在常数 $M>0$ 使得当 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X$ 时, 有

$$\|T(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_Y\le M\|x_1\|_1\|x_2\|_2\cdots\|x_n\|_n.$$

则称 T 是 **有界的 n 重线性算子** .

用 $B(X_1,X_2,\cdots,X_n;Y)$ 表示从 $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ 到 Y 的 n 重有界线性算子全体构成的空间. 对每一个 $T\in B(X_1,X_2,\cdots,X_n,Y)$, 定义 T 的范数为

$$\|T\|=\sup\{\|T(x_1,x_2,\cdots,x_n)\|_Y: \ \|x_k\|\le 1,\ k=1,2,\cdots,n\}.$$

利用数学归纳法, 容易证明, n 重有界线性算子空间 $B(X_1,X_2,\cdots,X_n;Y)$ 按照通常的线性运算以及上面定义的算子范数构成赋范线性空间. 进一步, 当 Y 是 Banach 空间时, $B(X_1,X_2,\cdots,X_n;Y)$ 也是 Banach 空间. 还可以证明, $B(X_1,X_2,\cdots,X_n,Y)$ 等距同构于 $B(X_1,B(X_2,\cdots,B(X_n,Y))\cdots)$. 因此, 从一定意义上讲, 这两个空间可以不加区别.

下面我们利用逐次定义的方法来定义高阶导映射 (导算子).

定义 7.20 设 X, Y 是两个实赋范线性空间, 而且 $U\subset X$ 是开集. 设 f: $U\to Y$ 在 U 内 F 可微. 如果导映射 f': $U\to B(X,Y)$ 在 $x_0\in U$ 处 F 可微, 则称 f 在点 x_0 处 **二阶 F 可微**. 记 f' 在 x_0 处的 F 导算子为 $f^{(2)}(x_0), f''(x_0)$ 或者 $\mathrm{d}^2 f(x_0)$, 称其为 f 的 **二阶导算子**. 如果 f': $U\to B(X,Y)$ 在 U 内 F 可微并且其导映射 f'': $U\to B(X,B(X,Y))$ 在点 x_0

处 F 可微, 则称 f **在点 x_0 处三阶 F 可微**. 记 f'' 在点 x_0 处的 F 导算子 $(f'')'(x_0)$ 为 $f^{(3)}(x_0)$, $f'''(x_0)$ 或者 $\mathrm{d}^3 f(x_0)$, 称其为 f 的**三阶导算子**. 一般地, 如果 $n-1$ 阶导映射 $f^{(n-1)}$ 在点 x_0 处 F 可微, 则称 f 在点 x_0 处 **n 阶 F 可微**. 记 $f^{(n-1)}$ 在点 x_0 处的 F 导算子 $(f^{(n-1)})'(x_0)$ 为 $f^{(n)}(x_0)$ 或 $\mathrm{d}^n f(x_0)$, 称其为 f 的 **n 阶导算子**. 如果 $f^{(n)}$ 在 U 上还是连续的, 则称 f 在 U 上是 n **阶连续可微**. 因此, $f'(x_0) \in B(X,Y)$, $f''(x_0) \in B(X, B(X,Y))$, $f'''(x_0) \in B(X, B(X, B(X,Y)))$, $\cdots$, 依此类推. 为了简单, 约定 $f^{(0)} = f$; $f^{(n)}(x_0)h_1 h_2 \cdots h_n = f^{(n)}(x_0)(h_1, h_2, \cdots, h_n)$; $f^{(n)}(x_0)h^n = f^{(n)}(x_0)(h, h, \cdots, h)$.

例 7.21　泛函 f: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 定义为

$$f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1^2.$$

求其二阶 F 微分.

解　任取 $h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2$, 则有

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x_1 + h_1)(x_2 + h_2) + (x_1 + h_1)^2 - (x_1 x_2 + x_1^2) \\ &= x_2 h_1 + x_1 h_2 + 2x_1 h_1 + h_1 h_2 + h_1^2. \end{aligned}$$

而且

$$\frac{|h_1 h_2 + h_1^2|}{\|h\|} = \frac{|h_1 h_2 + h_1^2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}} \to 0 (\|h\| \to 0),$$

因此

$$\mathrm{d}f(x)h = x_2 h_1 + x_1 h_2 + 2x_1 h_1 = (x_2 + 2x_1, x_1) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \nabla f(x) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

故一阶 F 导算子为 $\mathrm{d}f(x) = \nabla f(x)$.

再取 $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{R}^2$, 则有

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}f(x+k)h - \mathrm{d}f(x)h \\ = \ & (x_2 + k_2)h_1 + (x_1 + k_1)h_2 + 2(x_1 + k_1)h_1 - x_2 h_1 - x_1 h_2 - 2x_1 h_1 \\ = \ & k_2 h_1 + k_1 h_2 + 2k_1 h_1 \\ = \ & (k_1, k_2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

令

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

则二阶 F 微分为 $d^2 f(x)(h,k) = kAh^{\mathrm{T}}$.

定义 7.22　设 X, Y 为实赋范线性空间，k 为非负整数，$U \subset X$ 为开集，映射 $f: U \to Y$. 我们称 f 为 C^k **映射**，对 $k=0$ 是指 f 在 U 上连续；对 $k>0$ 是指 f 在 U 上具有 k 阶连续的 F 导映射 $f^{(k)}(x)$. 由 U 上到 Y 的具有 k 阶连续 F 导映射的映射全体构成的集合记为 $C^k(U, Y)$.

定理 7.23　设 X 为实赋范线性空间，U 是 X 的开集并且线段 $L := \{x_0 + th: \quad 0 \le t \le 1\} \subset U$. 如果泛函 $f: \quad U \to \mathbf{R}^1$ 在 L 上是 $C^{n+1}(0 \le n < +\infty)$ 映射，则存在 $\theta \in (0,1)$ 使得泰勒公式

$$\begin{aligned} & f(x_0+h) \\ = \; & f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 \\ & + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1} \end{aligned}$$

成立.

证明　设 $\phi(t) = f(x_0 + th), t \in [0,1]$. 则由链规则知 $\phi(t)$ 在 $[0,1]$ 上 $n+1$ 阶可微，而且

$$\phi'(t) = f'(x_0+th)h,$$

$$\phi''(t) = f''(x_0+th)h^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(x_0+th)h^{n+1}.$$

对于 ϕ 使用高等数学中通常的泰勒公式知道，存在 $0 < \theta < 1$ 使得

$$\begin{aligned} & f(x+h) = \phi(1) \\ = \; & \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2!}\phi''(0) + \cdots \\ & + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\phi^{(n+1)}(\theta) \end{aligned}$$

$$= f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2!}f''(x_0)h^2+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h)h^{n+1}.$$

这就说明泰勒公式成立.

例 7.24　设 $\varphi:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$、$x_0\in\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任意元，而且 $\varphi(t)=\mathrm{e}^{At}x_0$, $A\in B(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$. 则对于任意的 $h\in\mathbf{R}^n$ 有

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{|h|}=\frac{\mathrm{e}^{A(t+h)}x_0-\mathrm{e}^{At}x_0}{|h|},\quad h\neq 0.$$

但是按定义有

$$\begin{aligned}\varphi(t+h)-\varphi(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k(t+h)^k}{k!}x_0-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^kt^k}{k!}x_0\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^kt^{k-1}hx_0}{(k-1)!}+o(h).\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{d}\varphi(t)h=A\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{A^kt^k}{k!}hx_0$. 这就说明 $\varphi(t)$ 是如下矩阵微分方程的解:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)=A\varphi(t),\quad t\in\mathbf{R},\quad \varphi(0)=x_0.$$

§7.4　隐函数定理与反函数定理

在许多实际问题中，常常会遇到含参变量的方程，这些参变量有时是方程所描述问题中的某个物理量或者控制量，有时也可能是为了研究的方便而人为引入的. 在研究含参变量的方程中，隐函数定理是基本的工具之一. 值得强调的是，隐函数定理不仅给出了含参变量方程的局部可解性、唯一性，而且还提供了一种迭代算法.

隐函数定理的特别情形就是反函数定理. 反函数定理说明了一个可微的非线性映射在局部是否是一一的、到上的或者同胚的等问题可以归结为它的导映射 (线性映射) 是否是一一的、到上的或者是同构的

隐函数定理的另一个重要应用是将一个无限维含参变量的方程转化成一个有限维含参变量的方程加以研究，这种方法称为 Lyapunov-Schmidt 过程. 这个过程在局部分歧问题的研究中十分重要.

本节主要介绍隐函数定理、反函数定理.

首先给出 C^k 微分同胚的定义.

定义 7.25 如果 U,V 分别是实赋范线性空间 X,Y 中的开集, $f:U\to V$ 是双射, 而且 f 和 f^{-1} 均为 C^k 映射, 则称 f 为 **C^k 微分同胚**.

如果 U,V 分别是 X,Y 中的集合, $f: U\to V, x_0\in U$, 若存在 x_0 的邻域 U_0 及 $f(x_0)$ 的邻域 V_0, 使得 $f: U_0\to V_0$ 为 C^k 微分同胚, 则称 $f:U\to V$ 在 x_0 **局部 C^k 微分同胚**. 如果 $f: U\to V$ 在 U 中每一点都是局部 C^k 微分同胚, 则称 **f 在 U 上局部 C^k 微分同胚**.

定理 7.26 设 X,Y 为实 Banach 空间, U 是 X 中的开集, $x_0\in U, k\geq 1$, 如果 $f: U\to V$ 在 x_0 处局部 C^k 微分同胚, 则 $f'(x_0):X\to Y$ 具有有界逆算子.

证明 因为 f 在 x_0 处局部 C^k 微分同胚, 所以存在 x_0 的邻域 U_0 及 $f(x_0)$ 的邻域 V_0, 使得 $f: U_0\to V_0$ 为 C^k 微分同胚. 记 $g=f^{-1}: V_0\to U_0$, 则有

$$(g\circ f)(x)=x,\quad (f\circ g)(y)=y,$$

其中 $x\in U_0$, $y\in V_0$. 由于 f,g 都是 C^k 映射, 利用求导法则, 得到

$$[g'(y_0)][f'(x_0)]=I_X,\quad [f'(x_0)][g'(y_0)]=I_Y.$$

注意到 $f'(x_0)\in B(X,Y)$, 根据 Banach 逆算子定理得

$$[f'(x_0)]^{-1}=g'(y_0)=g'(f(x_0))\in B(Y,X).$$

设 X,Y 和 Z 都是实 Banach 空间, U 是乘积空间 $X\times Y$ 的开集, $f: U\to Z$. 类似于高等数学, 我们也可以引入偏导算子和偏导函数的概念. 设 $(x_0,y_0)\in U$. 若 $f(x,y_0)$ 在点 x_0 处关于 x 的 F 导算子存在, 则称它为 f 关于 x 在点 x_0 的 **F 偏导算子**, 记为 $f'_x(x_0,y_0)$. 若 f 在 U 内的每一点关于 x 的 F 导算子都存在, 则确定了一个 f 关于 x 的 F 导函数 $f'_x(x,y)$. 对于另一个变量 y 的讨论是类似的.

定理 7.27 (隐函数存在定理) 设 X,Y 和 Z 都是实 Banach 空间, U 是乘积空间 $X\times Y$ 的开集. 若 $f: U\to Z$ 是连续映射, 并且存在 $(x_0,y_0)\in U$, 满足:

(1) F 偏导函数 $f'_x(x,y)$ 在 U 内存在并且 $f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

(2) $f'_x(x_0,y_0)$: $X\to Z$ 具有有界逆;

(3) $f(x_0, y_0) = 0$.

则存在 $r > 0, \delta > 0$ 使得当 $\|y - y_0\| < \delta$ 时，方程 $f(x, y) = 0$ 在 $\|x - x_0\| < r$ 内存在唯一的连续解 $x = g(y)$ 满足 $x_0 = g(y_0)$.

证明　分三步完成证明.

(1) 因为 $f_x'(x_0, y_0): X \to Z$ 具有有界逆，故存在 $M > 0$，使得

$$\|[f_x'(x_0, y_0)]^{-1}\| \le M.$$

再由 $f_x'(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续，故能取到 $r > 0, \delta > 0$，使得当 $\|x - x_0\| \le r, \|y - y_0\| < \delta$ 时，有

$$\|f_x'(x, y) - f_x'(x_0, y_0)\| < \frac{1}{2M}.$$

又由于 $f(x_0, y)$ 在 y_0 处连续，不妨假设 $\|y - y_0\| < \delta$ 时，还有

$$\|f(x_0, y)\| < \frac{r}{2M}.$$

(2) 记

$$\phi_y(x) = x - [f_x'(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y).$$

下证当 $\|y - y_0\| < \delta$ 时，$\phi_y(x)$ 在 $B(x_0, r) = \{x \in X: \|x - x_0\| \le r\}$ 内存在唯一的不动点 x^*. 它显然满足 $f(x^*, y) = 0$. 当 $\|x - x_0\| \le r$ 时，由 r 的取法可知

$$\begin{aligned}\|\phi_y(x) - x_0\| &\le \|\phi_y(x) - \phi_y(x_0)\| + \|\phi_y(x_0) - x_0\| \\ &\le \sup_{\|x - x_0\| \le r} \|\phi_y'(x)\| \|x - x_0\| + \|[f_x'(x_0, y_0)]^{-1}\| \|f(x_0, y)\| \\ &< r,\end{aligned}$$

这表明 $\phi_y(x)$ 是从 $B(x_0, r)$ 到其自身的映射. 其次由 r 的取法可以知道，当 $\|x - x_0\| \le r$ 时

$$\begin{aligned}\|\phi_y'(x)\| &= \|I_X - [f_x'(x_0, y_0)]^{-1} f_x'(x, y)\| \\ &\le \|[f_x'(x_0, y_0)]^{-1}\| \|f_x'(x_0, y_0) - f_x'(x, y)\| \\ &< \frac{1}{2},\end{aligned}$$

这就说明映射 $\phi_y(x)$ 在 $B(x_0, r)$ 内压缩.

根据 Banach 压缩映射原理，当 $\|y-y_0\|<\delta$ 时，$\phi_y(x)$ 在 $B(x_0,r)$ 内存在唯一的不动点 x^*，记为 $x^*=g(y)$。由上面的证明可以看到这个不动点满足 $\|x^*-x_0\|<r$。又由唯一性得到 $x_0=g(y_0)$。

(3) 最后证明 $x=g(y)$ 在 $\|y-y_0\|<\delta$ 内连续. 任取 $y_1,y_2\in Y$，使得 $\|y_1-y_0\|<\delta$，$\|y_2-y_0\|<\delta$，$x_1=g(y_1)$，$x_2=g(y_2)$，其中 $\|x_1-x_0\|<r$，$\|x_2-x_0\|<r$，则

$$\begin{aligned}\|x_1-x_2\| &= \|\phi_{y_1}(x_1)-\phi_{y_2}(x_2)\|\\ &< \|\phi_{y_1}(x_1)-\phi_{y_1}(x_2)\|+\|\phi_{y_1}(x_2)-\phi_{y_2}(x_2)\|\\ &\le \frac{1}{2}\|x_1-x_2\|+\|\phi_{y_1}(x_2)-\phi_{y_2}(x_2)\|.\end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\|g(y_1)-g(y_2)\| &= \|x_1-x_2\|\\ &\le 2\|\phi_{y_1}(x_2)-\phi_{y_2}(x_2)\|.\end{aligned}$$

由 f 的连续性可知，当 $y_1\to y_2$ 时，$\|\phi_{y_1}(x_2)-\phi_{y_2}(x_2)\|\to 0$，因此 g 在 $\|y-y_0\|<\delta$ 内连续.

推论 7.28 假设 X,Y 是实 Banach 空间，U 是 X 中的开集，$x_0\in U,f:\ U\to Y$ 是 C^1 映射，而且满足

(1) $f'(x_0):\ X\to Y$ 具有有界逆；

(2) $y_0=f(x_0)$；

则存在 $r>0,\delta>0$，使得当 $\|y-y_0\|<\delta$ 时，方程 $f(x)=y$ 在 $\|x-x_0\|<r$ 内存在唯一的连续解 $x=g(y)$，并且满足 $x_0=g(y_0)$。

证明 在定理 7.27 中取 $Z=Y,f(x,y)=f(x)-y$ 即可.

定理 7.29 设 X,Y 是实 Banach 空间，U 是 X 中的开集，$x_0\in U$，$k\ge 1$，$f:\ U\to Y$ 是 C^k 映射，而且导算子 $f'_x(x_0,y_0):\ X\to Y$ 是正则算子 (即 $f'_x(x_0,y_0)$ 是满的并且具有有界逆)，则存在 $r>0$，$\delta>0$，使得当 $\|y-y_0\|<\delta$ 时，方程 $f(x,y)=0$ 在 $\|x-x_0\|<r$ 内存在唯一的连续解 $x=g(y)$ 而且它在 $\|y-y_0\|<\delta$ 内具有 k 阶连续导函数，还满足 $x_0=g(y_0)$。

证明 $x=g(y)$ 的存在性和唯一性及连续性已由定理 7.27 给出. 下面仅仅证明 $g(y)$ 在 $\|y-y_0\|<\delta$ 内具有 m 阶连续导函数. 为此，我们假定在定理 7.27 中选定的 r,δ 还满足：当 $\|x-x_0\|\le r$，$\|y-y_0\|<\delta$ 时，

$$\|f'_y(x,y)\|\le M_1.$$

任取 $y_2 \in Y$, 使得 $\|y_2 - y_0\| < \delta$, 则

$$\begin{aligned} f'_x(x,y_2) &= f'_x(x_0,y_0) + [f'_x(x,y_2) - f'_x(x_0,y_0)] \\ &= f'_x(x_0,y_0)\{I_X + [f'_x(x_0,y_0)]^{-1}(f'_x(x,y_2) - f'_x(x_0,y_0))\}. \end{aligned}$$

利用定理 7.27 证明中的结论 $\|f'_x(x,y) - f'_x(x_0,y_0)\| < 1/2M$ 可得, $f'_x(x,y_2)$ 在 $\|x - x_0\| < r$, $\|y_2 - y_0\| < \delta$ 内具有一致有界的逆算子. 所以, 存在常数 $M_2 > 0$, 使得当 $\|x - x_0\| < r$, $\|y_2 - y_0\| < \delta$ 时, 有

$$\|[f'_x(x,y_2)]^{-1}\| \le M_2.$$

于是, 当 $y_1 \in Y$ 且 $\|y_1 - y_0\| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} &\|g(y_1) - g(y_2) + [f'_x(g(y_2),y_2)]^{-1}f'_y(g(y_2),y_2)(y_1 - y_2)\| \\ \le\ &\|[f'_x(g(y_2),y_2)]^{-1}\|\|f'_x(g(y_2),y_2)(g(y_1) - g(y_2)) \\ &+ f'_y(g(y_2),y_2)(y_1 - y_2)\| \\ \le\ &M_2\|f'_x(g(y_2),y_2)(g(y_1) - g(y_2)) + f'_y(g(y_2),y_2)(y_1 - y_2)\|. \end{aligned}$$

由于 $f(g(y_2),y_2) = f(g(y_1),y_1) = 0$, 因此, 上式的最右端是 $\|g(y_1) - g(y_2)\| + \|y_1 - y_2\|$ 的高阶无穷小量, 利用

$$\|g(y_1) - g(y_2)\| = \|x_1 - x_2\| \le 2\|\phi_{y_1}(x_2) - \phi_{y_2}(x_2)\|,$$

可得

$$\begin{aligned} &\|g(y_1) - g(y_2)\| \\ \le\ &2M\sup\{\|f'_y(x,y)\| \cdot \|y_1 - y_2\| :\ \ \|y - y_0\| < \delta,\ \|x - x_0\| < r\} \\ \le\ &2MM_1\|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

于是

$$M_2\|f'_x(g(y_2),y_2)(g(y_1) - g(y_2)) + f'_y(g(y_2),y_2)(y_1 - y_2)\| = o(\|y_1 - y_2\|).$$

因此, $g(y)$ 在 y_2 处 Fréchet 可微, 而且

$$g'(y_2) = -[f'_x(g(y_2),y_2)]^{-1}f'_y(g(y_2),y_2).$$

利用求逆运算的解析性以及链规则可以归纳地证明 $g'(y)$ 具有 $k-1$ 阶连续导函数

定理 7.30 (反函数存在定理) 设 X、Y 都是实的 Banach 空间, U 是 X 中的开集, $x_0 \in U$, $f \in C^k(U,Y)\,(k \geq 1)$. 若 $f'(x_0): \ X \to Y$ 是满的并且具有有界逆算子, 则存在 x_0 的邻域 V 与 y_0 的邻域 W, 使得映射 $f: \ V \to W$ 是 C^k 微分同胚.

在定理 7.27 中, 只要取 $Z = Y, f(x,y) = f(x) - y, f(x_0) = y_0$, 即可得到反函数存在定理

第八章 线性算子半群

§8.1 线性算子半群的定义及其生成元

定义 8.1 设 X 是一个 Banach 空间，$\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 X 到它自身的有界线性算子族. 如果满足下面三个条件:

(1) $T(0)=I$, I 表示 X 上的恒等算子;

(2) 半群条件: 对于任意的 t, $s\geq 0$, 有 $T(t+s)=T(t)T(s)$;

(3) 连续条件: 对于任意的 $x\in X$, 有 $\lim\limits_{t\to 0^+}\|T(t)x-x\|=0$.

则称 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 为 X 上的 **强连续算子半群**, 简称 **C_0 半群**.

注 若算子半群 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 在 $t=0$ 处一致 (弱) 连续, 则称 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 **一致 (弱) 连续半群**.

定义 8.2 设 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群. 让

$$D(A)=\{x\in X:\ \lim_{t\to 0^+}(T(t)x-x)/t\quad 存在\},$$

定义线性算子 $A:\ D(A)\longrightarrow X$ 为

$$Ax=\lim_{t\to 0^+}(T(t)x-x)/t,$$

则称线性算子 A 为 C_0 半群 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 的 **生成元**.

定理 8.3 (半群的指数性质) 设 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群, 记 $\omega_0=\inf\limits_{t>0}\dfrac{\ln\|T(t)\|}{t}$, 它称为 C_0 半群 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 的 **指标**, 则有

$$\omega_0=\inf_{t>0}\frac{\ln\|T(t)\|}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\|T(t)\|}{t},$$

并且对任何 $\omega>\omega_0$, 存在依赖于 ω 的常数 $M=M(\omega)$ 使得

$$\|T(t)\|\leq M\,\mathrm{e}^{\omega t},\qquad \forall\ t\geq 0.$$

注 任何 C_0 半群 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 总有指数增长级 $\|T(t)\|\leq M\,\mathrm{e}^{\omega t}$, $t\geq 0$, $\omega\geq\omega_0$.

定理 8.4 设 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群， A 是其生成元，则

(1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\,\mathrm{d}s=T(t)x,\qquad \forall x\in X.$$

特别地，有

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^{h}T(s)x\,\mathrm{d}s=x,\qquad \forall x\in X.$$

(2) 对于任意的 $x\in X$，有 $\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\in D(A)$，并且有

$$A\left(\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s\right)=T(t)x-x,\qquad \forall x\in X.$$

(3) 对于任意的 $t\geq 0$，$T(t)$ 将 $D(A)$ 映入到 $D(A)$ 内并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x=AT(t)x=T(t)Ax,\ \ \forall x\in D(A).$$

和

$$T(t)x-x=\int_0^t T(s)Ax\,\mathrm{d}s,\ \ \forall x\in D(A).$$

(4) 对于任意的 $x\in D(A)$，有

$$T(t)x-T(s)x=\int_s^t T(\tau)Ax\,\mathrm{d}\tau-\int_s^t AT(\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

(5) A 是稠定的.

(6) A 是闭算子.

证明

(1) 因为 $T(t)$ 是强连续的，故 Riemann 可积，又因为

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)x\,\mathrm{d}s-T(t)x\right\|\\
=\ &\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(T(s)x-T(t)x)\,\mathrm{d}s\right\|\\
\leq\ &\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\|T(s)x-T(t)x\|\,\mathrm{d}s\\
\leq\ &\sup_{t\leq s\leq t+h}\|T(s)x-T(t)x\|\longrightarrow 0\,(h\to 0),
\end{aligned}$$

所以，对于任意的 $x \in X$，有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s = T(t)\,x.$$

特别地，

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^{h}T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s = x.$$

(2) 对于任意的 $x \in X$，$h > 0$，因为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\,(T(h)-I)\int_0^t T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s\\
=\ &\frac{1}{h}\int_0^t (T(s+h)\,x - T(s)\,x)\,\mathrm{d}\,s\\
=\ &\frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s\\
=\ &\frac{1}{h}\int_h^{t} T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s\\
=\ &\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s\\
\longrightarrow\ &T(t)\,x - T(0)\,x\,(h \to 0^+),
\end{aligned}$$

从而 $\int_0^t T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s \in D(A)$. 而且 $A\int_0^t T(s)\,x\,\mathrm{d}\,s = T(t)\,x - x$.

(3) 设 $x \in D(A)$，t，$h > 0$，则

$$\frac{T(h)-I}{h}\,T(t)\,x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \longrightarrow T(t)\,A\,x\,(h \to 0^+),$$

于是 $T(t)\,x \in D(A)$，而且 $A\,T(t)\,x = T(t)\,A\,x$，也就是

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}T(t)\,x = A\,T(t)\,x = T(t)\,A\,x.$$

另一方面，当 $t > h > 0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{T(t)\,x - T(t-h)\,x}{h} - T(t)\,A\,x\right]\\
=\ &\lim_{h\to 0^+}T(t-h)\left[\frac{T(h)\,x - x}{h} - A\,x\right] + \lim_{h\to 0^+}[T(t-h)\,A\,x - T(t)\,A\,x]\\
=\ &0,
\end{aligned}$$

其中，第一项是因为 $x \in D(A)$ 及 $\|T(t-h)\|$ 在 $0 \le h \le t$ 上有界，第二项是因为 $T(t)$ 的强连续性，就是有

$$\frac{\mathrm{d}^-}{\mathrm{d}t}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

(4) 对下式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x$$

从 s 到 t 积分可得

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\,\mathrm{d}\tau = \int_s^t AT(\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

特别地，有

$$T(t)x - x = \int_0^t T(\tau)Ax\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t AT(\tau)x\,\mathrm{d}\tau.$$

(5) 对于任意的 $x \in X$，若记

$$x_h = \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,\mathrm{d}s, \qquad h > 0,$$

则 $x_h \in D(A)$，而且

$$\lim_{h\to 0^+} x_h = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,\mathrm{d}s = T(0)x = x,$$

所以 $\overline{D(A)} = X$.

(6) 设 $x_n \in D(A)$，$x_n \longrightarrow x$，$Ax_n \longrightarrow y\,(n \to +\infty)$，则由 (3) 得到

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{n\to+\infty}(T(t)x_n - x_n) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^t T(s)Ax_n\,\mathrm{d}s = \int_0^t T(s)y\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

在上式两端同除以 $t > 0$，再取 $t \to 0$ 的极限，则有 $x \in D(A)$ 以及 $y = Ax$，从而 A 是闭算子.

我们将基本结论引述如下.

定理 8.5 设 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群, A 是其生成元, 其指标为 ω_0. 则

(1) $T(t)$ 由 A 唯一确定;

(2) $A\in B(X)\Longleftrightarrow \lim\limits_{t\to 0^+}\|T(t)-I\|=0$. 此时有 $T(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(tA)^n}{n!}$;

(3) 如果 $\mathrm{Re}\lambda>\omega_0$, 则 $\lambda\in\rho(A)$ (A 的预解集), 而且 A 在 λ 处的预解式可以表示成

$$R(\lambda;A)x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}T(t)x\,\mathrm{d}t,\qquad \forall x\in X;$$

特别地,

$$R(\lambda;A)^n x=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}t^{n-1}T(t)x\,\mathrm{d}t,\quad \forall n\in\mathbf{N},\ \ x\in X;$$

(4) 对于任给的 $\omega>\omega_0$, 存在常数 $M=M(\omega)>0$, 当 $\mathrm{Re}\lambda>\omega$ 时, 有

$$\|R(\lambda;A)^n\|\leq\frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n},\qquad \forall n\in\mathbf{N}.$$

§8.2 Hille-Yosida 定理

本节讨论在具体问题中广泛应用的 C_0 半群的进一步性质. 着重讨论算子半群的生成问题, 即就是说在什么条件下, 线性算子 A 才能成为某一 C_0 半群的生成元? 给出了非常重要的 Hille-Yosida 定理.

定理 8.6 (Hille-Yosida 定理) 设 A 是 Banach 空间 X 上的线性算子, 则 A 为某 C_0 半群 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 的生成元, 当且仅当

(1) A 为稠定的闭线性算子;

(2) 存在常数 $M>0$ 和 $\omega>0$ 使得 $(\omega,+\infty)\subset\rho(A)$, 并且当 $\lambda>\omega$ 时, 有

$$\|R(\lambda;A)^n\|\leq\frac{M}{(\lambda-\omega)^n},\qquad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

证明 必要性的证明. 如果线性算子 A 生成 C_0 半群 $\{T(t):\ t\geq 0\}$, 此时有 $\|T(t)\|\leq M\mathrm{e}^{\omega t}$. 由定理 8.4 可知, A 是稠定的闭线性算子, 即就是 (1) 成立. 下面证明 (2) 成立. 为此, 设 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 的指标为 ω_0, 任

取 $\omega > \omega_0$. 由定理 8.5(3) 可知, 当 $\lambda > \omega$ 时, $\lambda \in \rho(A)$, 再由定理 8.5(4) 可知 (2) 也成立.

充分性的证明. 如果线性算子 A 满足 (1) 和 (2). 对于 $\lambda > \omega$, 令

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda; A) = \lambda R(\lambda; A) A = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I,$$

下面将证明

(i) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda; A) x = x, \ \forall x \in X$;

(ii) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \ x \in D(A)$.

因为

$$x = R(\lambda; A)(\lambda I - A) x, \ \forall x \in D(A),$$

于是有 $\lambda R(\lambda; A) x - x = R(\lambda; A) A x$, 则

$$\begin{aligned} \| \lambda R(\lambda; A) x - x \| &= \| R(\lambda; A) A x \| \\ &\le \frac{M}{\lambda - \omega} \| A x \| \to 0 \, (\lambda \to +\infty). \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

由于

$$\| \lambda R(\lambda; A) \| \le \frac{M \lambda}{\lambda - \omega} < 2M \, (\text{当 } \lambda \text{ 充分大时}),$$

利用 (8.2.1) 式有

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda; A) x = x, \qquad \forall x \in D(A).$$

由条件 $\overline{D(A)} = X$, 而且 $\lambda R(\lambda; A)$ 对 λ 一致有界, 因而可知, 对任意的 $y \in X$, 有 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda; A) y = y$. 特别地, 有

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda; A) A x = A x, \qquad \forall x \in D(A).$$

因此, 对于任意的 $x \in D(A)$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x &= \lim_{\lambda \to +\infty} [-\lambda [I - \lambda R(\lambda; A)]] x \\ &= \lim_{\lambda \to +\infty} [-\lambda [R(\lambda; A)(\lambda I - A) - \lambda R(\lambda; A)]] x \\ &= \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda; A) A x = A x. \end{aligned}$$

对于 $\lambda > \omega$, $t \geq 0$, 令

$$\begin{aligned} S_\lambda(t) &:= e^{tA_\lambda} = e^{-\lambda t[I-\lambda R(\lambda;A)]} = e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R(\lambda;A)} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} R(\lambda;A)^n, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \| S_\lambda(t) \| &\leq e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \frac{M}{(\lambda-\omega)^n} \\ &= e^{-\lambda t} M \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda^2 t}{\lambda - \omega} \right)^n \\ &= M e^{-\lambda t} \exp\left(\frac{\lambda^2 t}{\lambda - \omega} \right) \\ &= M \exp\left(\frac{\lambda \omega t}{\lambda - \omega} \right) = M e^{\omega_1 t}, \end{aligned}$$

其中 $\omega_1 = \dfrac{\lambda\omega}{\lambda-\omega} \longrightarrow \omega\,(\lambda \to +\infty)$. 对于给定的 $t > 0$, 当 $\lambda \to +\infty$ 时 $S_\lambda(t)$ 一致有界. 因为

$$\begin{aligned} S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x &= \int_0^t \frac{d}{ds}[S_\mu(t-s) S_\lambda(s) x] \, ds \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds}[e^{(t-s)A_\mu} e^{sA_\lambda} x] \, ds \\ &= \int_0^t e^{(t-s)A_\mu}(A_\lambda - A_\mu) e^{sA_\lambda} x \, ds \\ &= \int_0^t S_\mu(t-s) S_\lambda(s) [A_\lambda - A_\mu] x \, ds, \end{aligned}$$

所以当 λ, μ 允分大, 对于 $x \in D(A)$, $t \in [0, N]$, $N > 0$ 为任意给定时, 有

$$\begin{aligned} \| S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x \| &< \left(\int_0^t M e^{\omega_2(t-s)} M e^{\omega_1 s} \, ds \right) \| A_\lambda x - A_\mu x \| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

因此, 对于 $x \in D(A)$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S_\lambda(t) x$ 收敛. 我们定义

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to +\infty} S_\lambda(t) x, \qquad x \in D(A).$$

又因为 $\overline{D(A)} = X$, 因而对于任意的 $x \in X$, 始终存在 $x_\varepsilon \in D(A)$, 使得

$$\| x - x_\varepsilon \| < \min\left\{ \frac{\varepsilon}{3\| S_\lambda(t) \|} : \quad t \in [0, N], \ N > 0 \text{为任意给定} \right\}.$$

于是，对于任意的 $x \in X$，有

$$\begin{aligned}
& \| S_\lambda(t)\, x - S_\mu(t)\, x \| \\
\leq \ & \| S_\lambda(t)\, x_\varepsilon - S_\mu(t)\, x_\varepsilon \| + \| S_\lambda(t)(x_\varepsilon - x) \| + \| S_\mu(t)(x_\varepsilon - x) \| \\
< \ & \varepsilon.
\end{aligned}$$

从而可以知道，对于任意的 $x \in X$，当 $\lambda \to +\infty$ 时，$S_\lambda(t)\, x$ 收敛，所以对于任意的 $x \in X$，$T(t)\, x$ 均有意义，并且有

$$T(t)\, x = \lim_{\lambda \to +\infty} S_\lambda(t)\, x, \qquad \forall x \in X.$$

上述极限在 t 的任一有界集上是一致的．注意到 $\| S_\lambda(t) \| \leq M\, e^{\omega_1 t}$，我们可以知道 $\| T(t) \| \leq M\, e^{\omega_1 t}$，即就是有 $T(t) \in B(X)$，$T(0) = I$．再注意到

$$\| T(t_1)\, x - T(t_2)\, x \| = \lim_{\lambda \to +\infty} \| S_\lambda(t_1)\, x - S_\lambda(t_2)\, x \|,$$

并且在任何有界区间 $[a, b]$ 上，当 $\lambda \to +\infty$ 时一致收敛，从而 $T(t)$ 是强连续的．另外，对于任意的 $t \geq 0$，$s \geq 0$，由 $S_\lambda(t+s) = S_\lambda(t) S_\lambda(s)$，得到

$$T(t+s) = T(t) T(s),$$

因此，$\{ T(t) : \ t \geq 0 \}$ 是 X 上的 C_0 半群．

最后来证明 A 是 C_0 半群 $\{ T(t) : \ t \geq 0 \}$ 的生成元．为此，若设 $\{ T(t) : \ t \geq 0 \}$ 的生成元是 B，则当 $x \in D(A)$ 时，下列极限成立：

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t e^{s A_\lambda} A_\lambda x \, d s - \int_0^t T(s)\, A x \, d s \right\| \\
\leq \ & \int_0^t \| e^{s A_\lambda} A_\lambda x - e^{s A_\lambda} A x \| \, d s + \int_0^t \| e^{s A_\lambda} A x - T(s)\, A x \| \, d s \\
\leq \ & M \int_0^t e^{\omega_1 s} \| A_\lambda x - A x \| \, d s + \int_0^t \| S_\lambda(s)\, A x - T(s)\, A x \| \, d s \\
\longrightarrow \ & 0 \, (\lambda \to +\infty).
\end{aligned}$$

又由于当 $x \in D(A)$ 时有

$$\begin{aligned}
S_\lambda(t) x - x &= e^{t A_\lambda} x - x = \int_0^t \frac{d}{d s} (e^{s A_\lambda} x) \, d s \\
&= \int_0^t e^{s A_\lambda} A_\lambda x \, d s = \int_0^t S_\lambda(s) A_\lambda x \, d s
\end{aligned}$$

利用前述极限在上式两边取 $\lambda \to +\infty$ 时的极限，则有

$$T(t)\,x - x = \int_0^t T(s)\,A\,x\,\mathrm{d}\,s.$$

从而，对于任意的 $x \in D(A)$，有

$$B\,x = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)\,x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h T(s)\,A\,x\,\mathrm{d}\,s = A\,x,$$

这就证明了 C_0 半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元 B 满足 $A \subset B$. 下面证明相反的包含关系. 设 $\lambda > \max\{\omega_0, \omega\}$, 由定理 8.5(3) 可知，$\lambda \in \rho(B)$, 再由假设可知 $\lambda \in \rho(A)$, 因而

$$(\lambda I - A)\,D(A) = (\lambda I - B)\,D(B) = X.$$

又因为 $D(A) \subset D(B)$, 从而

$$(\lambda I - B)D(A) \supset (\lambda I - A)D(A) = X.$$

即 $(\lambda I - B)\,D(A) = X$, 所以有

$$D(B) = R(\lambda; B)\,X = D(A),$$

这说明 C_0 半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元是 A.

推论 8.7　设 A 是 Banach 空间 X 上的线性算子，则 A 是某个 C_0 半群的生成元而且满足条件 $\|T(t)\| \leq M\,\mathrm{e}^{\omega t}$, 当且仅当

(1)　A 是闭的稠定算子;

(2)　如果 $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, 则 $\lambda \in \rho(A)$, 而且

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^n}, \qquad n = 1,\ 2,\ \cdots.$$

推论 8.8　设 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群，A 是其生成元，ω_0 是其指标. 对于 $\lambda > \omega_0$, 令 $A_\lambda = \lambda\,A\,R(\lambda; A) = \lambda^2\,R(\lambda; A) - \lambda\,I$, 则

$$T(t)\,x = \lim_{\lambda\to+\infty} \mathrm{e}^{t\,A_\lambda}\,x, \qquad \forall\, x \in X.$$

注　A_λ 称为 A 的 **Yosida 逼近**.

§8.3　紧半群、解析半群与可微半群

下面重点介绍几种特殊的 C_0 半群，它们在理论上和实际应用中都十分重要.

定义 8.9　设 X 是 Banach 空间，A 是 X 上的线性算子，如果对于任意 $x \in D(A)$，有 $x^* \in X^*$，使得

(1) $\langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2$;

(2) $\mathrm{Re}\langle x^*, Ax\rangle \leq 0$.

则称 A 为 **耗散算子**. 如果 C_0 半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元 A 是耗散的，则称 C_0 半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 为 **耗散半群**.

定义 8.10　设 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 为 C_0 半群，如果对于每一个 $t \geq 0$，有 $\|T(t)\| \leq 1$，则称 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 为 **压缩半群**.

我们将基本结论引述如下.

定理 8.11　设 X 是 Banach 空间，A 是 X 上的线性算子，那么 A 是耗散算子，当且仅当 $\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda\|x\|,\quad \forall x \in D(A),\ \forall \lambda > 0$.

定理 8.12　设 X 是 Hilbert 空间，A 是 X 上的线性算子，那么 A 是耗散算子，当且仅当 $\mathrm{Re}\langle Ax, x\rangle \leq 0,\quad \forall x \in D(A)$.

定理 8.13 (Lumer-Phillips)　设 A 是 Banach 空间 X 上的线性算子，则 A 是某一压缩半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元，当且仅当

(1) A 是稠定的闭线性算子;

(2) A 为耗散算子，并且对某个 $\lambda_0 > 0$, $R(\lambda_0 I - A) = X$.

定理 8.14　设 A 是 Hilbert 空间 X 上的稠定闭线性算子，则 A 是某一压缩半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元，当且仅当 A 为耗散算子，而且 $R(I - A) = X$.

推论 8.15　设 A 是 Hilbert 空间 X 上的稠定闭线性算子，则 A 为某个压缩半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元，当且仅当

(1) $(0, +\infty) \subset \rho(A)$;

(2) 对于任意的 $\lambda > 0$，有 $\|R(\lambda; A)\| \leq 1/\lambda$.

推论 8.16　设 A 是 Hilbert 空间 X 上的稠定闭线性算子，如果 A 是耗散的并且 $(0, +\infty) \subset \rho(A)$，则 A 为某压缩半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元.

注　将定理和推论中的 Hilbert 空间换为 Banach 空间后仍然成立

定义 8.17　设 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群，如果当 $t>t_0>0$ 时，$T(t)$ 是紧算子．则称 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ **对于 $t>t_0$ 是紧的**．如果对于任意的 $t>0$, $T(t)$ 是紧算子，则称 $\{T(t):\ t>0\}$ 是**紧半群**.

定理 8.18　设 $T(t)$ 是以 A 为生成元并且满足 $\|T(t)\|<M\,e^{\omega t}$ 的 C_0 半群，则 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 成为紧半群，当且仅当

(1) $T(t)$ 关于 $t>0$ 在空间 $B(X)$ 中连续;

(2) 存在某个 $\lambda\in\rho(A)$, 使得 $R(\lambda;A)$ 是紧算子.

定理 8.19 (紧自伴半群展开定理)　设 A 是 Hilbert 空间 X 上的 C_0 半群 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 的生成元，如果存在某个实数 $\lambda\in\rho(A)$, 使得 $R(\lambda;A)$ 是自伴的紧算子，则 X 是可分的且 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是自伴的 (即对于任意的 $t\geq 0$, 有 $T^*(t)=T(t)$) 紧半群．当 X 为无穷维空间时，则存在实数列 $\{\lambda_n\}$ 使得 $\lambda_n\longrightarrow -\infty\,(n\to+\infty)$, 而且

(1) $\sigma(A)=\sigma_p(A)=\{\lambda_n\}$;

(2) 相应于 $\{\lambda_n\}$ 的特征向量全体 $\{e_n:\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ 构成 X 的标准正交基;

(3) 对于任意的 $x\in X$, 当 $t>0$ 时有 $T(t)\,x\in D(A)$, 而且

$$\begin{aligned} T(t)\,x &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t}\langle x,e_n\rangle\, e_n, \\ A\,T(t)\,x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n\, e^{\lambda_n t}\langle x,e_n\rangle\, e_n; \end{aligned}$$

(4) $\sup\limits_{n\geq 1}\lambda_n=\omega_0$, 其中 ω_0 表示半群 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 的指标.

注　如果算子 A 是某 C_0 半群 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 的生成元，而且 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是自伴的紧半群，则方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t}=A\,u, \\ u(0)=u_0, \quad u_0\in D(A). \end{cases}$$

的解可以表示为

$$u(t)=T(t)\,u_0=\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\lambda_n t}\langle u_0,e_n\rangle\, e_n,$$

其中 λ_n 为 A 的特征值，e_n 为相应于 λ_n 的特征向量并且 $\{e_n\}$ 构成 X 的标准正交基.

定义 8.20 设 $\sum_\theta=\{z\in\mathbf{C}:\ z\neq 0,\ |\arg z|<\theta\}, 0<\theta\leq\pi/2$ 是复平面 $\mathbf{C}$ 中某个区域，X 是复 Banach 空间，当 $z\in\sum_\theta\bigcup\{0\}$ 时，$T(z)\in B(X)$. 如果 $T(z)$ 是 $\sum_\theta$ 上的算子解析函数，而且满足

(1) $T(0)=I$;

(2) $T(z_1+z_2)=T(z_1)T(z_2),\qquad \forall\ z_1,\ z_2\in\sum_\theta$;

(3) $\lim\limits_{z\to 0}T(z)x=x,\qquad \forall z\in\sum_\theta,\ x\in X$.

则称 $\{T(z):\ z\in\sum_\theta\bigcup\{0\}\}$ 为 $\sum_\theta$ 上的**解析半群**. 如果 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是一个 C_0 半群，当它可以延拓为复平面中包含非负实轴的某个扇形区域中的解析半群时，则称 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是**解析半群**.

定理 8.21 设 X 是复 Hilbert 空间，$\{T(t):\ t>0\}$ 是 X 上的自伴紧半群，则 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 可以延拓成 $\sum_{\pi/2}$ 中的解析半群，并且对每个 $z\in\sum_{\pi/2}$, $T(z)$ 是紧算子.

定义 8.22 设 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群，对于任意的 $x\in X$, $t_0>0$. 若 $T(t)x$ 关于 $t>t_0$ 在 X 上强可微，则称 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 $t>t_0$ 的可微半群. 若 $T(t)x$ 关于 $t>0$ 在 X 上强可微，则称 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是**可微半群**.

定理 8.23 设 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 Banach 空间 X 上的 C_0 半群，则 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 $t\geq 0$ 的可微半群，当且仅当它是一致连续半群.

定理 8.24 如果 $\{T(t):\ t>0\}$ 是以 A 为生成元的 C_0 半群，而且 $\|T(t)\|\leq M\mathrm{e}^{\omega t}\,(\omega>0)$, 则以下几条等价:

(1) $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 为解析半群;

(2) 存在常数 $C>0$, 使得对于每一个 $\sigma>\omega,\ \eta\neq 0$, 有

$$\|R(\sigma+\mathrm{i}\eta;A)\|\leq\frac{C}{|\eta|};$$

(3) 存在 $0<\theta<\pi/2$ 以及常数 M, 使得

$$\Delta_1=\{\lambda:\ |\arg(\lambda-\omega)|<\frac{\pi}{2}+\theta\}\subset\rho(A),$$
$$\|R(\lambda;A)\|\leq\frac{M}{|\lambda-\omega|},\qquad \lambda\in\Delta_1.$$

下面给出线性算子半群的几个例子.

例 8.25 $C([0,+\infty))$ 上的平移半群. 设 $X = C([0,+\infty))$ 是 $[0,+\infty)$ 上有界并且一致连续的函数 $x(t)$ 全体, 对于 $x \in C([0,+\infty))$, 规定

$$\|x\| = \sup\{|x(t)|: \quad \forall t \in [0,+\infty)\},$$

则 $C([0,+\infty))$ 是 Banach 空间, 这个空间中点列的强收敛就是相应函数列的一致收敛. 我们在空间 X 上定义算子值函数 T: $[0,+\infty) \longrightarrow B(X)$, 用 $T(t)$ 表示坐标平移的变换, 也就是 $(T(t)x)(s) = x(t+s)$, $\forall t \geq 0$, 试证明 $\{T(t): \ t \geq 0\}$ 是一个算子半群并求其生成元 A.

证明 因为

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \sup_{\|x\|=1} \|T(t)x\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{s\geq 0} |x(s+t)| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \sup_{s\geq 0} |x(s)| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1, \end{aligned}$$

所以, $\|T(t)\| \leq 1$. 取 $x \equiv 1$, 则 $\|T(t)x\| = 1 = \|x\|$, 这就说明 $\|T(t)\| = 1$. 又因为当 $x \in C([0,+\infty))$ 时, $x(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 从而

$$\lim_{u\to 0} \sup |x(t+s+u) - x(t+s)| = 0,$$

即 $\lim\limits_{u\to 0} \|T(t+u)x - T(t)x\| = 0$. 故取值于 $C([0,+\infty))$ 的向量值函数 $T(t)x$ 是强连续的.

因为

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{T(t)x - x}{t}\right)(s) = \lim_{t\to 0^+} \frac{x(t+s) - x(s)}{t} = x'(s),$$

因此, 此收缩 C_0 半群的生成元为

$$D(A) = \{x: \quad x, \ x' \in X\}, \quad (Ax)(s) = x'(s).$$

由于 $\{T(t): \ t \geq 0\}$ 是收缩 C_0 半群, 从而由推论 8.15 知当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda \in \rho(A)$. 设 $x \in X$, $y \in D(A)$, 则方程 $(\lambda I - A)y = x$ 成为: $\lambda y(s) - y'(s) = x(s)$. 于是 $y = R(\lambda; A)x$ 可以通过求解上述微分方程得到

$$\begin{aligned} y(s) &= (R(\lambda; A)x)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\xi} x(s+\xi)\,d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\xi} (T(\xi)x)(s)\,d\xi, \end{aligned}$$

这表明预解式 $R(\lambda; A)$ 是半群 $\{T(t): \ t \geq 0\}$ 的 Laplace 变换.

例 8.26 设 $X = L^p(\mathbf{R})\,(p>1)$. 定义 $\{T(t):\ t\in\mathbf{R}\}$ 为

$$T(t)\,x(s) = x(s+t), \qquad x\in X.$$

则 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 X 上的强连续算子半群.

证明 对于任意的 $t\in\mathbf{R}$, 有

$$\|T(t)x\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(s+t)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} = \|x\|, \qquad x\in X,$$

因此, $\|T(t)\| = 1$. 又因为对于固定的 $x\in X$,

$$\|T(t)x - x\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(s+t) - x(s)|^p\,\mathrm{d}s\right)^{1/p} \longrightarrow 0\,(t\to 0),$$

因此, $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 在 0 点强连续, 这就说明 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 X 上的强连续算子半群.

例 8.27 设 X 是可分的 Hilbert 空间, $\{e_n\}$ 是 X 的标准正交基, $\{\lambda_n\}$ 是复数列, 定义 X 上的以 $t\in[0,\ +\infty)$ 为参数的算子族 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 为

$$T(t)\,x = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda_n t}\,\langle x, e_n\rangle\, e_n, \qquad x\in X,$$

则 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 C_0 半群的充要条件是

$$\sup_{n\geq 1} \operatorname{Re}\lambda_n = \omega < +\infty.$$

当 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 是 C_0 半群时, 求它的生成元 A.

证明 充分性的证明. 因为对于任意的 $x\in X$,

$$\begin{aligned}
\|T(t)\,x\|^2 &= \left\|\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{\lambda_n t}\,\langle x, e_n\rangle\, e_n\right\|^2\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathrm{e}^{\lambda_n t}|^2\,|\langle x, e_n\rangle|^2\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{2\operatorname{Re}\lambda_n t}\,|\langle x, e_n\rangle|^2\\
&\leq \mathrm{e}^{2\omega t}\,\|x\|^2.
\end{aligned}$$

所以 $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, 这说明对于任意的 $t \in [0, +\infty)$, $T(t)$ 是有界线性算子. 利用 $\{e_n\}$ 的正交性, 容易知道 $T(t)$ 具有半群性质以及 $T(0) = I$. 下面证明 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的强连续性. 因为

$$
\begin{aligned}
& \|T(t)x - x\|^2 \\
= & \sum_{n=1}^{+\infty} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \\
= & \sum_{n=1}^{N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 + \sum_{n>N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 |\langle x, e_n \rangle|^2 \\
\leq & \max_{1 \leq n \leq N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 + (1 + e^{\omega t})^2 \sum_{n>N} |\langle x, e_n \rangle|^2,
\end{aligned}
\tag{8.3.1}
$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 取正整数 N 充分大, 使得

$$(1 + e^{\omega t})^2 \sum_{n>N} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

再选取 t_0 充分小, 使得当 $0 < t < t_0$ 时

$$\max_{1 \leq n \leq N} |e^{\lambda_n t} - 1|^2 \sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

于是, 利用 (8.3.1) 可得, 当 $t < t_0$ 时有: $\|T(t)x - x\| < \varepsilon$. 这就证明了半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的强连续性.

必要性的证明　　设 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 是 C_0 半群, 则当 $t \in [0, +\infty)$ 时, $T(t)$ 是有界线性算子, 也就是存在常数 $M(t) > 0$, 使得

$$\|T(t)x\| \leq M(t)\|x\|, \qquad \forall\ x \in X.$$

因而

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{2\operatorname{Re}\lambda_n t} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq [M(t)]^2 \|x\|^2.$$

分别取 $x = e_n$, $n = 1, 2, \cdots$, 则有 $e^{2\operatorname{Re}\lambda_n t} \leq [M(t)]^2$. 所以, 存在常数 ω 使得 $\sup\limits_{n\geq 1} \operatorname{Re}\lambda_n = \omega < +\infty$. 故 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 是 C_0 半群的充要条件得证.

下面求此 C_0 半群 $\{T(t):\ t\geq 0\}$ 的生成元. 因为

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x-x}{t}=\lim_{t\to 0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\lambda_n t}-1}{t}\langle x,e_n\rangle e_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\langle x,e_n\rangle e_n.$$

因此, 得到

$$\begin{aligned}D(A)&=\left\{x\in X:\ \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\langle x,e_n\rangle e_n\in X\right\}\\&=\left\{x\in X:\ \sum_{n=1}^{+\infty}|\lambda_n|^2|\langle x,e_n\rangle|^2<+\infty\right\},\\Ax&=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\langle x,e_n\rangle e_n.\end{aligned}$$

注　判断一个算子 A 能否生成 C_0 半群, 主要是利用 Hille-Yosida 定理和 Lumer-Phillips 定理.

§8.4　线性算子半群在微分方程中的应用

在常微分方程中, 借助于常微分方程的基本解和常数变异公式, 可以给出非齐次常微分方程 Cauchy 问题的通解公式, 这对研究常微分方程的基本性质是非常重要的. 同样地, 借助于线性算子半群, 可以给出偏微分方程及泛函微分方程解的表达式, 这种表达式在形式上类似于常微分方程的情形, 这样, 我们可以利用一种统一的方式研究常微分方程和偏微分方程以及泛函微分方程.

一个随时间而变的物理系统常用微分方程初值问题或混合初边值问题来描述. 令 $u(t)$ 为某个物理系统在时间 t 时的状态. 设 $u(t)$ 关于时间 t 的变化率由依赖于 $u(t)$ 的某个函数 A 给出, 初始值 $u(0)=u_0$ 为已知, 则问题归结为下列初值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\,u(t)}{\mathrm{d}\,t}=A\,u(t),\\ u(0)=u_0,\end{cases}\tag{8.4.1}$$

其中

$$u(t)\in X,\quad \frac{\mathrm{d}\,u(t)}{\mathrm{d}\,t}=\lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}.$$

为了使得 $u(t+h)-u(t)$ 有意义，取 X 为一个线性空间，为了使得极限在 X 中有意义，取 X 为 Banach 空间．A 是一个从它的定义域 $D(A)\subset X$ 到 X 的算子．方程 $\dfrac{\mathrm{d}\,u(t)}{\mathrm{d}\,t}=A\,u(t)$ 意味着 $u(t)\in D(A)$ 而且

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}-A\,u(t)\right\|=0,$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 X 中的范数．

我们将通过几个例子说明什么是抽象 Cauchy 问题以及如何适当选取函数空间把一个具体问题转化为抽象空间中微分方程的抽象 Cauchy 问题，然后利用算子半群理论给出与常微分方程形式上类似的偏微分方程的解．

例 8.28　设 Ω 是 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中的有界区域，$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，Ω 的闭包记为 $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$，$\triangle=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 表示 Laplace 算子．$\mathbf{R}^n$ 中的点 x 表示为 $x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$x_k\in\mathbf{R}$ 是 x 的第 k 个分量．

考察经典的热传导方程的混合初边值问题：求一个函数 $u(t,x)$ 使得在 $0\le t<+\infty$，$x\in\overline{\Omega}$ 中满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\triangle u(t,x), & (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega,\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\Omega,\\ u(t,x)=0, & x\in\partial\Omega,\quad t\ge 0.\end{cases}\tag{8.4.2}$$

设 X 为 Ω 上的一个函数空间，例如可以取 X 为 $C(\overline{\Omega})$, 即 $\overline{\Omega}$ 上的连续函数空间，或取 X 为 L^p，$p\ge 1$, 即 p 次 Lebesgue 可积函数空间．两个导数 $\dfrac{d\,u(t)}{d\,t}$ 与 $\dfrac{\partial\,u(t,x)}{\partial\,t}$ 均是差商 $\dfrac{u(t+h,x)-u(t,x)}{h}$ 的极限，而两个导数分别是在 X 的范数意义下和逐点意义下的极限，因此可以形式地将 $\dfrac{d\,u(t)}{d\,t}$ 与 $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$ 看成是一样的．为了定义算子 A, 令

$$D(A)=\{u\in X:\ \ u',u''\in X,\ \ u(t,x)\,|_{\partial\Omega}=0\},$$

定义 $A\,u=\triangle\,u$，$\forall\,u\in D(A)$. 这就说明方程 (8.4.2) 可以转化为抽象空间中的微分方程 (8.4.1) 的形式，值得注意的是方程中 (8.4.2) 的边值条件已经被吸收到算子 A 的定义域 $D(A)$ 中, 而且 $D(A)$ 还吸收了 $u\in D(A)(\forall\,t\ge 0)$ 的要求．

例 8.29　考察波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \triangle u(t,x), & (t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbf{R}^n, \\ \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = u_1(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{8.4.3}$$

如果令 $v(t,x) = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$，则原方程可以写成下面的向量方程:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & I \\ \triangle & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \dfrac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \end{cases} \tag{8.4.4}$$

其中 I 为恒等算子. 这就说明方程 (8.4.3) 可以转化为抽象空间中的微分方程 (8.4.1) 的形式.

例 8.30　考察一阶偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x} + f(t,x), & t \in (0,+\infty), \ x \in (0,+\infty), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,+\infty), \\ u(t,0) = 0, & t \in (0,+\infty). \end{cases} \tag{8.4.5}$$

其中 $f(t,x)$, $u_0(x)$ 是具有指定性质的给定函数. 设 $X = L^2((0,+\infty))$, 定义空间 X 上的无界线性算子 A 为

$$D(A) = \{u: \ u, \ u' \in X, \ u(0) = 0\}, \ (Au)(x) = u'(x), \quad x \in (0,+\infty),$$

则 A 是 X 中的稠定闭算子. 令 $u(t)(x) = u(t,x)$, $f(t)(x) = f(t,x)$ 为空间 X 中的元素, 则方程 (8.4.5) 可以转化为抽象空间 X 中的微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\, u(t)}{\mathrm{d} t} = A u(t) + f(t), & t \in (0,+\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{8.4.6}$$

其中 $u(t)$ 是由 $(0,+\infty)$ 到 X 的抽象函数. (8.4.6) 是抽象 Cauchy 问题, 显然, 若 $u(t)$ 是抽象 Cauchy 问题的解, 则 $u(t,x) = u(t)(x)$ 便是 (8.4.5)

的解. 于是, 求解偏微分方程 (8.4.5) 的问题归结为求解抽象 Cauchy 问题 (8.4.6).

例 8.31　考察一维热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x), & t \in (0,+\infty),\ x \in (0,l), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in (0,l), \\ u(t,0) = u(t,l) = 0, & t \in (0,+\infty). \end{cases} \tag{8.4.7}$$

设 $X = L^2([0,l])$, 在 X 上定义算子 A 为

$$D(A) = \{u: \quad u,\ u',\ u'' \in X,\ u(0) = u(l) = 0\},$$

$$(Au)(x) = u''(x), \qquad x \in (0,l).$$

令 $u(t)(x) = u(t,x)$, $f(t)(x) = f(t,x)$ 为空间 X 中的元素, 则方程 (8.4.7) 可以转化为抽象空间 X 中的微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\, u(t)}{\mathrm{d}\, t} = A\, u(t) + f(t), & t \in (0,+\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{8.4.8}$$

定义 8.32　设 X 是 Banach 空间, A 是从 $D(A) \subset X$ 到 X 的线性算子 (一般来说, 它是无界的), $u_0 \in X$ 是给定的. 所谓初值为 u_0 的由算子 A 确定的齐次抽象 Cauchy 问题, 是指寻求一个定义在 $[0,+\infty)$ 上的在 X 中取值的抽象函数 $u(t)$. 它在 $t \in [0,+\infty)$ 时连续, 在 $t \in (0,+\infty)$ 时, $u(t) \in D(A)$, 并且关于 t 强连续可微以及满足下面的抽象方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\, u(t)}{\mathrm{d}\, t} = A\, u(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{8.4.9}$$

若存在满足上述性质的 $u(t)$, 则称它是抽象 Cauchy 问题 (8.4.9) 的一个**经典解**.

形如 (8.4.9) 的算子方程 (发展方程) 的抽象 Cauchy 问题具有丰富的实际来源和物理背景, 而当我们掌握了用算子半群求解抽象 Cauchy 问题的一般方法以后, 反过来便可以去指导许多具体问题的求解.

我们将有关基本的结论引述如下.

设我们所讨论的系统是适定的. 适定的含义是：如果给定系统的初值和物理参数，则系统在任一时刻 t 的状态 $u(t)$ 总是存在的、唯一的和稳定的. 稳定的含义是：初值和物理参数的微小改变引起状态的改变也是微小的.

定理 8.33　设 A 是 X 中的稠定算子，$\rho(A) \neq \emptyset$, 则抽象 Cauchy 问题 (8.4.9) 对每个 $u_0 \in D(A)$, 在 $[0,+\infty)$ 上存在唯一经典解的充分必要条件为，A 是 X 上某 C_0 半群的生成元.

推论 8.34　设算子 A 是 X 上某可微半群的生成元，则对任意给定的 $u_0 \in X$, 抽象 Cauchy 问题 (8.4.9) 存在唯一的经典解.

推论 8.35　设算子 A 是 X 上某解析半群的生成元，则对任意给定的 $u_0 \in X$, 抽象 Cauchy 问题 (8.4.9) 存在唯一的经典解.

对于非齐次抽象 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\, u(t)}{\mathrm{d}\, t} = A\, u(t) + f(t), \quad t \in (0,+\infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{8.4.10}$$

始终假定其相应的齐次方程 (8.4.9) 在 $u_0 \in D(A)$ 时，存在唯一的经典解，并且始终假定 A 是 C_0 半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元.

定义 8.36　设 f 是由 $[0,l]$ 到 X 的抽象函数，$u_0 \in X$, 如果存在 $u \in C([0,l],X)$, 使得 $u(t)$ 在 $(0,l)$ 上强连续可微，而且 $u(t) \in D(A)$, $t \in (0,l)$, 以及满足方程 (8.4.10), 则称 u 是 (8.4.10) 在 $[0,l]$ 上的 **经典解**. 当 $l = +\infty$ 时，可以类似地定义.

定理 8.37　设 A 是 C_0 半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元，如果 $u_0 \in D(A)$, $f \in C^1((0,+\infty),X)$, 则初值问题 (8.4.10) 有唯一解

$$u(t) = T(t)\, u_0 + \int_0^t T(t-s)\, f(s)\, \mathrm{d}\, s.$$

而且 $u \in C^1((0,+\infty),X)$ 取值在 $D(A)$ 中.

定理 8.38　设 $f \in C^1([0,l],X)$, 则抽象 Cauchy 问题 (8.4.10) 对于任给的 $u_0 \in D(A)$ 在 $[0,l]$ 上存在唯一的经典解.

定理 8.39　设 $f \in C([0,l],X)$, 并且当 $t \in (0,l]$ 时有 $f(t) \in D(A)$ 以及 $A\, f(t) \in L^1((0,l],X)$. 则当 $u_0 \in D(A)$ 时，(8.4.10) 有唯一的经典解.

一般来说，如果 A 是 C_0 半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元，对于 $u_0 \in X$ 但 $u_0 \notin D(A)$ 时，抽象 Cauchy 问题 (8.4.10) 可能没有经典解，这说明经典解对于应用来说很不方便，因此应当对解的概念进行推广，使得它能适用于任意的初值 $u_0 \in X$. 下面介绍一种最为常用的广义解.

定义 8.40 设 A 是 C_0 半群 $\{T(t):\ t>0\}$ 的生成元, $u_0 \in X$, $f \in L^1((0,l),X)$, 函数 $u \in C([0,l],X)$ 定义为

$$u(t) = T(t)\,u_0 + \int_0^t T(t-s)\,f(s)\,\mathrm{d}\,s, \quad 0 < t < l, \tag{8.4.11}$$

称此函数 $u(t)$ 为初值问题 (8.4.10) 在 $[0,l]$ 上的 **温和解 (mild solution)**.

定理 8.41 设 A 是 C_0 半群 $\{T(t):\ t>0\}$ 的生成元, $f \in L^1((0,l),X)$, u 是 (8.4.10) 在 $[0,l]$ 上的温和解, 则对于任意的 $l' < l$, u 是 (8.4.10) 的经典解在 $[0,l']$ 上的一致极限.

在应用中还需要有强解的概念.

定义 8.42 设函数 u 在 $[0,l]$ 上几乎处处可微, 而且 $u' \in L^1((0,l),X)$. 如果 u 在 $[0,l]$ 上几乎处处满足方程 $u'(t) = A\,u(t) + f(t)$ 及初值 $u(0) = u_0$, 就称此函数 u 为初值问题 (8.4.10) 的一个 **强解**.

注 如果 u 是 (8.4.10) 的强解, 而且 $f \in L^1((0,l),X)$, 则 u 由 (8.4.11) 给出, 因此强解是温和解, 而且是 (8.4.10) 唯一的强解.

定理 8.43 设 A 是 C_0 半群 $\{T(t):\ t \geq 0\}$ 的生成元, 如果 f 在 $(0,+\infty)$ 上几乎处处可微, 而且 $f' \in L^1((0,+\infty),X)$, 则对于任意的 $u_0 \in D(A)$, 初值问题 (8.4.10) 在 $(0,+\infty)$ 上有唯一的强解 u, 而且 u 由 (8.4.11) 给出.

习题与提示

1. 设 $1 \leq p \leq q < +\infty$. 证明 $l^p \subset l^q$.

(提示: 当 $1 < p \leq q < +\infty$ 时, 对于任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p$ 和任意的 $\varepsilon > 0$, 恒存在自然数 N, 使得 $\sum_{k=N}^{+\infty} |x_k|^p < \varepsilon^p$, 从而

$$\sum_{k=N}^{+\infty} |x_k|^q = \sum_{k=N}^{+\infty} |x_k|^p |x_k|^{q-p} \leq \varepsilon^{q-p} \sum_{k=N}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty.$$

故 $x \in l^q$.)

2. 设 $[a, b]$ 是有界闭区间, 证明 $L^2([a, b]) \subset L^1([a, b])$.

(提示: 对于 $f \in L^2([a, b])$, 因为

$$\int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d} t \leq \left[\int_a^b |f(t)|^2\right]^{1/2} \left[\int_a^b 1^2 \, \mathrm{d} t\right]^{1/2} < +\infty.$$

因此, $f \in L^1([a, b])$.)

3. 设 (X, d) 是一个距离空间, 中心在 x_0、半径为 r 的开球定义为

$$B(x_0, r) = \{x \in X: \quad d(x, x_0) < r\}.$$

集合 $A \subset X$ 是开集是指对于任意的 $x_0 \in A$, 恒存在以 x_0 为中心的开球包含在 A 中.

(1) 证明开球是开集;

(2) 开集全体构成的集合是 X 上的一个拓扑.

(提示: 直接验证满足开集和拓扑的定义.)

4. 证明 $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ 是 $\mathbf{R}$ 上的距离

(提示: 直接验证距离的三条公理.)

5. 设 (X, d) 是距离空间. 对于任意的 $x \in X$, 定义 $f(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$, 证明 $f(x)$ 是连续函数

(提示: 对于任意的 $x, x_0 \in X$, 由 $d(x, y) < d(x, x_0) + d(x_0, y)$ 可得, $\inf_{y \in A} d(x, y) \leq d(x, x_0) + \inf_{y \in A} d(x_0, y)$. 类似地, 由 $d(x_0, y) \leq d(x, x_0) +$

$d(x,y)$ 可得, $\inf_{y\in A} d(x_0,y) \le d(x,x_0) + \inf_{y\in A} d(x,y)$. 因此, $|f(x)-f(x_0)| \le d(x,x_0)$. 故 $f(x)$ 为连续函数.)

6. 设 A,B 为距离空间 (X,d) 中的两个不相交的闭集, 试证明存在 X 上的连续函数 $f(x)$ 使得当 $x \in A$ 时, $f(x)=0$; 当 $x\in B$ 时, $f(x)=1$.

(提示: 对于任意的 $x\in X$, 令 $d(x,A)=\inf_{y\in A} d(x,y)$. 定义 X 上的函数 $f(x)$:

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},$$

则 $f(x)$ 为 X 上的连续函数并且满足所需条件.)

7. 设 X 和 Y 都是距离空间, A 在 X 中稠密, $f: X\to Y$ 是连续映射, 证明 $f(A)$ 在 $R(f)=f(X)$ 中稠密.

(提示: $f(A)$ 在 $R(f)=f(X)$ 中稠密 $\Leftrightarrow \overline{f(A)}=R(f)$. 任取 $y\in R(f)$, 则存在 $x\in X$, 使得 $f(x)=y$. 因为 $\overline{A}=X$, 所以存在 $\{x_n\}\subset A$, 使得 $x_n\to x$. 再由 $f(x)$ 的连续性, 可得 $f(x_n)\to f(x)$, 故 $\overline{f(A)}=R(f)$.)

8. 设 $c:=\{x=(x_1,\ x_2,\ \cdots):\ x_i\in \mathbf{F},\ \lim_{k\to+\infty} x_k \text{存在}\}$, 在 c 上定义如下距离

$$d_\infty(x,y)=\sup_k |x_k-y_k|,$$

证明: c 是完备的距离空间.

(提示: 证明 l^∞ 是一个完备的距离空间, 再证明 c 是 l^∞ 的闭子集.)

9. 设 X 是一个全有界的距离空间, 试证对于每个无限子集 $Y\subset X$ 都有一个直径小于给定的 $\varepsilon>0$ 的无限子集 Y_0.

(提示: 对于一个给定的 $\varepsilon>0$, 空间 X 有一个 $\varepsilon/2$ 网 $M=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$. 因此 Y 落在 n 个球, $B(x_1,\varepsilon/2)$, $\cdots$, $B(x_n,\varepsilon/2)$ 的并集内. 由于 Y 是无限集, 故这些球之一必定包含 Y 的一个无限子集.)

10. 如果距离空间 X 是紧的, 证明 X 是完备的, 试说明完备性不蕴涵紧性.

(提示: 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 点列. 由于 X 是紧的, 所以 $\{x_n\}$ 有收敛的子列 $\{x_{n_k}\}$, 不妨设当 $k\to+\infty$ 时, 有 $x_{n_k}\longrightarrow x\in X$. 设 $\varepsilon>0$, 由于 $\{x_{n_k}\}$ 收敛和 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 点列, 故存在自然数 N 使得

$$d(x_{n_k},x)<\varepsilon/2,\quad d(x_n,x_{n_k})<\varepsilon/2,\ \ n_k,\ \ n>N.$$

又由于

$$d(x_{n_k},x)\le d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<\varepsilon,\quad n_k,\ \ n>N,$$

故 $\{x_n\}$ 收敛. 由于 Cauchy 点列 $\{x_n\}$ 是任意的, 因此推出 X 是完备的. 第二个论断可以用 $\mathbf{R}$ 来说明.)

11. 举例说明全有界集不一定是列紧集

(提示: 取 $X = (0,2)$, X 中的距离为: $d(x,y) = |x-y|, \forall x,y \in X$, 则 $A = (0,1) \subset X$ 是全有界集, 但非列紧集.)

12. 在距离空间中举例说明, 对于紧性而言全有界性是必要的, 但不是充分的

(提示: $(0,1)$ 是 $\mathbf{R}$ 中的全有界集, 但不是紧的.)

13. 如果距离空间 (X,d) 是紧的, 证明对于任意的 $\varepsilon > 0$, 空间 X 都有一个有限子集 M, 使得每一点 $x \in X$ 到 M 的距离 $d(x,M) = \inf\limits_{y \in M} d(x,y) < \varepsilon$.

(提示: 由于 X 是紧的, 故它是全有界的.)

14. 举例说明不动点定理中完备性条件是不可缺少的.

(提示: 距离空间 $X = (0,1]$ 具有由 $\mathbf{R}$ 诱导出的距离, 考察 $T: X \to X$, $Tx = x/2$.)

15. 设 X 是一个距离空间. 当 $x \neq y$ 时, 如果 $T: X \longrightarrow X$ 满足 $d(Tx,Ty) < d(x,y)$, 而且 T 有一个不动点, 证明这个不动点是唯一的.

(提示: 若 T 有两个不动点 x 和 y, $x \neq y$, 将蕴涵下述矛盾 $d(x,y) = d(Tx,Ty) < d(x,y)$.)

16. 如果 T 是压缩的, 证明 T^n $(n \in \mathbf{N})$ 也是压缩的. 如果 $T^n (n > 1)$ 是压缩的, 证明 T 未必是压缩的.

(提示: 由 T 是压缩的有: $d(T^n x, T^n y) \leq \alpha^n d(x,y)$, $\alpha < 1$. 由 $(\xi_1, \xi_2) \longrightarrow (\xi_2, 0)$ 定义的映射 $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ 不是压缩的, 但是 T^2: $(\xi_1, \xi_2) \longrightarrow (0, 0)$ 是压缩的.)

17. 在高等数学中, 迭代序列 $x_n = f(x_{n-1})$ 收敛的一个充分条件是, f 是连续可微的, 而且 $|f'(x)| \leq \alpha < 1$, 试用 Banach 不动点定理来验证它.

(提示: 由微分中值定理有

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x-y| \leq \alpha|x-y|,$$

其中 ξ 位于 x 与 y 之间. 因此 f 是压缩的.)

18. 设 X 是赋范线性空间, $K \subset X$ 是紧集, $T: K \to K$ 满足 $\|Tx - Ty\| < \|x-y\| (x \neq y)$, 证明 T 有唯一的不动点.

(提示: 令 $f(x) = \|x - Tx\|$, 则 $f(x)$ 在 K 上取得最大值和最小值. 设 $f(x)$ 在 $x^* \in K$ 取得最小值, 因此, $f(x^*) = 0$. 否则就会有

$f(Tx^*) < f(x^*)$.)

19. 设 (X,d) 是距离空间，其中 $X = [1,+\infty)$，d 是通常的距离，定义映射 T 为

$$Tx = \frac{x}{2} + \frac{1}{x},$$

证明 T 是一个压缩映射，对于 T 来说，请问最小的压缩系数和不动点是什么？

(提示： 最小的压缩系数为： 1/2，不动点为： $\sqrt{2}$.)

20. 设 (X,d) 是一个距离空间，对于任意的 x，$y \in X$，$x \neq y$，T 满足下面的弱压缩条件：

$$d(Tx,Ty) < d(x,y),$$

(1) 证明 T 最多有一个不动点；

(2) 说明 T 可能没有不动点.

(提示： 用反证法证明 (1). (2) 对于 $x \in [1,+\infty)$，考虑 $Tx = x+1/x$.)

21. 请说明用迭代公式 $x_n = g(x_{n-1}) = (1 + x_{n-1}^2)^{-1}$，能够解方程 $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$. 对于 $x_0 = 1$ 计算 x_1，x_2，x_3，并且给出 $d(x,x_n)$ 的估计.

(提示： 对于 $g(x) = (1+x^2)^{-1}$，利用第 17 题.)

22. 映射 $T:[a,b] \to [a,b]$ 称为在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件是指存在一个常数 K 使得对于任意的 $x,y \in [a,b]$，满足下式：

$$|T(x) - T(y)| \leq K|x - y|.$$

(1) T 是否为一个压缩映射？

(2) 若 $T(x)$ 有连续导数，试证明 T 满足 Lipschitz 条件.

(提示： (1) 当 $K < 1$ 时是一个压缩映射. (2) 由微分中值定理 $|T(x) - T(y)| = |T'(\theta)||x - y|$，$\theta \in (x,y)$. 因 $T'(x)$ 连续，则在 $[a,b]$ 上有界，所以，T 满足 Lipschitz 条件.)

23. 设 (X,d) 是距离空间，A 和 B 是 X 中的紧集，证明必存在 $x_0 \in A, y_0 \in B$，使得 $d(A,B) = d(x_0,y_0)$，其中 $d(A,B) = \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$.

(提示： 由下确界的定义知，必存在点列 $\{x_n\} \subset A$ 和 $\{y_n\} \subset B$，使得 $d(A,B) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n,y_n)$. 但由于 A 和 B 是紧集，必存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 和

$\{y_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k} \to x$，$y_{n_k} \to y$. 再由 $d(x,y)$ 的连续性可得：$d(A,B) = d(x_0,y_0)$. ）

24. 设 A 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭集，T 是 A 到 A 的算子．对于任意的 $x,y \in A$，有 $d(Tx,Ty) < d(x,y)$. 试证明 T 在 A 中存在唯一的不动点.

（提示：由于 A 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭集，从而 A 是紧集．令 $\varphi(x) = d(x,Tx), \forall x \in A$，设 $m = \inf\limits_{x\in A}\varphi(x)$，则存在 $\{x_n\} \subset A$ 使得 $\varphi(x_n) \to m$. 因为 A 是紧集，故存在 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $x_{n_k} \to x^* \in A, \varphi(x_{n_k}) \to \varphi(x^*) = \inf\limits_{x\in A}\varphi(x)$. 下面来证明 $Tx^* = x^*$. 否则，$\varphi(x^*) = d(x^*,Tx^*) > 0$，则由已知条件知：$d(TTx^*,Tx^*) < d(Tx^*,Tx^*)$，即就是 $\varphi(Tx^*) < \varphi(x^*) = \inf\limits_{x\in A}\varphi(x)$，产生矛盾．所以 $Tx^* = x^*$. 另外，也可以利用第 18 题. ）

25. 设 (X,d) 是完备的距离空间，T 是 X 到 X 的算子．如果

$$\alpha_n = \sup_{x,y\in X}\frac{d(T^nx,T^ny)}{d(x,y)} \to 0(n \to +\infty),$$

证明 T 在 X 中有唯一的不动点.

（提示：因为

$$\alpha_n = \sup_{x,y\in X}\frac{d(T^nx,T^ny)}{d(x,y)} \to 0(n \to +\infty),$$

故存在自然数 n_0，使得 $0 \le \alpha_{n_0} < 1$，由定理 2.78 知，T 在 X 中有唯一的不动点. ）

26. 设 $f(t) \in C([0,1])$，求出方程

$$x(t) = f(t) + \lambda\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s,\quad t \in [0,1]$$

的连续解.

（提示：由例 2.84 知方程对任意的 λ 存在唯一解 $x(t) \in C([0,1])$. 原方程可以变形为

$$x(t) = f(t) + \lambda\int_0^1 K(t,s)\,x(s)\,\mathrm{d}s = (Tx)(t),$$

其中 $K(t,s) = \begin{cases} 0, & t < s, \\ 1, & t > s. \end{cases}$

由逐次逼近法，无妨取 $x_0(t)=0$. 从而有 $x_1=Tx_0, x_2=T^2x_0,\cdots,$ $x_n=T^nx_0$, 则 $x(t)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n(t)$, 即为原方程的解.

容易计算出

$$x_1(t)=f(t),\quad x_2(t)=f(t)+\lambda\int_0^1 K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$x_{n+1}(t)=f(t)+\sum_{m=1}^{n}\lambda^m\int_0^1 K_m(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $K_1(t,s)=K(t,s)$, $K_m(t,s)=\int_0^1 K(t,s)K_{m-1}(t,s)\,\mathrm{d}s$, 故

$$K_m(t,s)=\begin{cases}0, & t<s,\\ \dfrac{(t-s)^{m-1}}{(m-1)!}, & t\geq s.\end{cases}$$

$$x_{n+1}(t)=f(t)+\lambda\int_0^1\left[1+\lambda(t-s)+\frac{\lambda^2(t-s)^2}{2!}+\cdots+\frac{\lambda^{n-1}(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\right]f(s)\,\mathrm{d}s.$$

所以,

$$x(t)=\lim_{n\to+\infty}x_n(t)=f(t)+\lambda\int_0^t e^{\lambda(t-s)}f(s)\,\mathrm{d}s.\qquad)$$

27. 设 c 为一切收敛数列构成的集合，c 中的线性运算与 l^p 中的相同. 在 c 中定义如下范数:

$$\|x\|=\sup_{n\geq1}|\xi_n|,\quad \forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in c.$$

证明 c 为可分的 Banach 空间

(提示: 完备性的证明. 设 $\{x_n\}$ 为 c 中任意的基本点列，$x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots)$, 则对于任意的 $\varepsilon>0$, 恒存在自然数 n_0, 使得对于任意的自然数 m,n, 当 $m>n_0, n>n_0$ 时，有

$$|\xi_k^{(m)}-\xi_k^{(n)}|<\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots.\tag{*}$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_k^{(n)}$ 存在. 令 $\xi_k=\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_k^{(n)}$, $k=1,2,\cdots$. 因为对于任意的自然数 p

$$|\xi_{k+p}-\xi_k|\leq|\xi_{k+p}-\xi_{k+p}^{(n)}|+|\xi_{k+p}^{(n)}-\xi_k^{(n)}|+|\xi_k^{(n)}-\xi_k|,$$

因此，$\lim\limits_{k\to+\infty}\xi_k$ 存在．故 $x=(\xi_k)\in c$. 又若在式 (*) 中固定 $n>n_0$，但令 $m\to+\infty$，则得

$$|\xi_k^{(n)}-\xi_k|<\varepsilon,\quad k=1,2,\cdots,n>n_0,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$.

可分性的证明．令 $M=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n,r,r,\cdots):\ n\in\mathbf{N},\ r_k,r\in\mathbf{Q}\}$，则 $M\subset c$ 而且 M 是可数集．下面说明 M 在 c 中稠密．任取 $x=(\xi_n)\in c$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n=\xi$，则存在自然数 n_0 及有理数 r，使得当 $n>n_0$ 时，有 $|\xi_n-r|<\varepsilon$．对于 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_0}$，必定存在有理数 $r_1,r_2,\cdots,r_{n_0}$，使得 $|\xi_k-r_k|<\varepsilon,k=1,2,\cdots,n_0$. 令 $y=(r_1,r_2,\cdots,r_{n_0},r,r,\cdots)$，则 $y\in c$ 而且 $d(x,y)<\varepsilon$．由于 ε 是任意的，因此，M 在 c 中稠密．此即说明 c 是可分的 Banach 空间．)

28．设 c_0 为一切收敛于零的数列构成的集合，c_0 中的线性运算与 l^p 中的相同．在 c_0 中定义如下范数：

$$\|x\|=\sup_{n\geq1}|\xi_n|,\quad\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in c_0.$$

证明 c_0 为可分的 Banach 空间．

(提示：类似于第 27 题，对于可分性仅需取 $M=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots):\ n$ 为任一自然数，r_k 为有理数$\}$．)

29．在 $C^1([a,b])$ 中，令

$$\|f\|_1=\left[\int_a^b(|f|^2+|f'|^2)\,\mathrm{d}x\right]^{1/2},\quad\forall f\in C^1([a,b]),$$

(1) 求证 $\|\cdot\|_1$ 是 $C^1([a,b])$ 上的范数；

(2) 问 $(C^1([a,b]),\|\cdot\|_1)$ 是否完备？

(提示：验证范数公理．$(C^1([a,b]),\|\cdot\|_1)$ 是完备的．)

30．在 $C([0,1])$ 中，对于每一个 $f\in C([0,1])$，令

$$\|f\|_1=\left(\int_0^1|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2},\quad\|f\|_2=\left(\int_0^1(1+x)\,|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

求证 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $C([0,1])$ 中的两个等价范数．

(提示：因为 $\varphi(x)=1+x$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，因此有

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &\le \left[\int_0^1 (1+x)|f(x)|^2\,\mathrm{d}\,x\right]^{1/2}\\ &\le \left[\int_0^1 2|f(x)|^2\,\mathrm{d}\,x\right]^{1/2} = \sqrt{2}\|f\|_1.\quad)\end{aligned}$$

31. 设 A, B 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间，而且 $A\perp B$, 证明 $A+B$ 是 X 的闭子空间.

(提示： 如果 $x_n = a_n + b_n \in A+B, a_n \in A, b_n \in B$, 则 $\|x_n - x_m\|^2 = \|a_n - a_m\|^2 + \|b_n - b_m\|^2$. 所以，当 $\{x_n\}$ 是收敛点列时，$\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是收敛点列.)

32. 设 A, B 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间. 若对于任意的 $0<\varepsilon<1$, $a\in A$, $b\in B$, 有

$$|\langle a, b\rangle| \le \varepsilon\,\|a\|\,\|b\|.$$

证明 $A+B$ 是 X 的闭子空间.

(提示： 如果 $a\in A, b\in B$, 则

$$\|a+b\|^2 \ge \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\varepsilon\|a\|\|b\| \ge (1-\varepsilon^2)\|a\|^2.$$

所以，当 $\{a_n+b_n\}$ 是基本点列时，$\{a_n\}$ 是基本点列，同理可证 $\{b_n\}$ 也是基本点列.)

33. 设 X 是一个 Hilbert 空间.

(1) 若 M 和 N 是 X 的闭子空间，试举例说明 $M+N$ 不一定是闭的;

(2) 若 M 是 X 的闭子空间，P 是一个正交投影算子，试举例说明 $P(M)$ 不一定是闭的.

(提示： $X=l^2, M=\{(x_1, x_1, x_2, 2x_2, x_3, 3x_3, \cdots)\}, N=\{(0, y_1, 0, y_2, 0, y_3, \cdots)\}$. P 是 $N^\perp$ 上的正交投影.)

34. 给出赋范线性空间 X 的例子，使得 X 上的范数不能由内积诱导出来.

(提示： 在 $\mathbf{R}^3$ 中，令 $\|x\|_1 = |x_1|+|x_2|+|x_3|$, 则 $(\mathbf{R}^3, \|\cdot\|_1)$ 是一个赋范线性空间，但上述范数不能由内积诱导出来. 事实上，取 $x=(1,0,0)$, $y=(0,1,0)$, 则 $x+y=(1,1,0), x-y=(1,-1,0)$, 所以，$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2^2+2^2=8$. 但 $2(\|x\|^2+\|y\|^2)=2(1+1)=4$, 不满足平行四边形公式.)

35. 若 X 是可分的 Hilbert 空间, 证明 X 中任何标准正交系是可数集.

(提示: 如果 $\{e_\alpha: \alpha \in I\}$ 是 X 的标准正交系, 则对于任意的 $\alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta$, 恒有 $\|e_\alpha - e_\beta\|^2 = 2$.)

36. 设 $\{e_k\}$ 与 $\{\epsilon_k\}$ 分别为 Hilbert 空间 X 中的标准正交基与标准正交系, 而且 $\sum\limits_i |\langle e_k, \epsilon_i\rangle| = 1\ (k = 1, 2, \cdots)$, 证明 $\{\epsilon_k\}$ 是 X 中的标准正交基

(提示: $e_k = \sum\limits_n \langle e_k, \epsilon_n\rangle$ 再利用定理 4.52.)

37. $\{e_k\}$ 与 $\{\epsilon_k\}$ 分别为 Hilbert 空间 X 中的标准正交基与标准正交系, 而且 $\sum\limits_k \|e_k - \epsilon_k\|^2 < 1$. 证明 $\{\epsilon_k\}$ 是 X 中的标准正交基.

(提示: 如果 $x \in X$, 对于任意的自然数 n, $x \perp \epsilon_k$, 则 $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\langle x, e_k - \epsilon_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \|e_k - \epsilon_k\|^2$, 所以 $x = 0$.)

38. 求证在 $C([a,b])$ 中不可能引进一种内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 使其满足

$$\langle f, f\rangle^{1/2} = \max_{a\leq t\leq b} |f(t)|, \quad \forall f \in C([a,b]).$$

(提示: 参看例 4.18.)

39. 在 $L^2([-1,1])$ 中, 问偶函数集的正交补是什么? 试证明你的结论.

(提示: $M = \overline{\operatorname{span}\{x^{2n}: n = 0, 1, 2, \cdots\}}$,
则 $M^\perp = \overline{\operatorname{span}\{x^{2n+1}: n = 0, 1, 2, \cdots\}}$.)

40. 设 X 是 Hilbert 空间, 证明

$$\|x - z\| = \|x - y\| + \|y - z\|,$$

当且仅当对于某个 $\alpha \in [0,1]$, 使得 $y = \alpha x + (1 - \alpha) z$.

(提示: 利用 Cauchy-Schwarz 不等式 $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ 而且其中等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关.)

41. 若 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的可逆线性算子, 问 T^{-1} 是否为线性算子?

(提示: 是. 因 T 是可逆算子, 所以 $T \neq 0$, 而且 $Tx = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\forall y_1, y_2 \in R(T)$, α, β 是数, 则有

$$\begin{aligned} &T(T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) - \alpha T^{-1} y_1 - \beta T^{-1} y_2) \\ &= TT^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) - \alpha TT^{-1} y_1 - \beta TT^{-1} y_2 \\ &= \alpha y_1 + \beta y_2 - \alpha y_1 - \beta y_2 = 0. \end{aligned}$$

因此，$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2$.）

42. 设 T 为复 Hilbert 空间中的有界线性算子 $\|T\|\leq 1$，证明 $\{x: Tx=x\}=\{x:\ T^*x=x\}$.

（提示： 令 $M=\{x:\ Tx=x\}, N=\{x:\ T^*x=x\}$. 任取 $x\in M$，则

$$\begin{aligned}0 &\leq \langle T^*x-x,T^*x-x\rangle=\|T^*x\|^2-\|x\|^2\\ &\leq \|x\|^2-\|x\|^2=0.\end{aligned}$$

所以，$T^*x=x$, $M\subset N$. 同理可以证明：$N\subset M$, 因此 $M=N$.）

43. 设 X 是一个复 Hilbert 空间，$T:X\to X$ 是线性算子，对于任意的 $x,y\in X$ 满足 $\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle$, 证明 T 一定是有界的.

（提示： 方法一． 如果 $x_n\to x, Tx_n\to z$, 则 $\langle z-Tx,y\rangle=0,\forall y\in X$. 利用闭图像定理

方法二． 否则的话，将会存在点列 $\{y_n\}$ 使得 $\|y_n\|=1$ 及 $\|Ty_n\|\longrightarrow+\infty$. 设 $f_n(x)=\langle Tx,y_n\rangle=\langle x,Ty_n\rangle$. 则 f_n 定义在整个 X 上，而且 f_n 是线性的，每个 f_n 都是有界的，这是因为

$$|f_n(x)|=|\langle x,Ty_n\rangle|\leq\|x\|\|Ty_n\|.$$

对于每个 $x\in X$, 点列 $\{f_n(x)\}$ 有界，这是因为

$$|f_n(x)|=|\langle Tx,y_n\rangle|\leq\|Tx\|\|y_n\|=\|Tx\|$$

由一致有界原理知，$\{\|f_n\|\}$ 有界，不妨设 $\|f_n\|\leq M$, 因此 $|f_n(x)|\leq M\|x\|$, 取 $x=Ty_n$, 便有

$$|f_n(Ty_n)|=\langle Ty_n,Ty_n\rangle=\|Ty_n\|^2=|f_n(Ty_n)|\leq M\|Ty_n\|,$$

故有 $\|Ty_n\|\leq M$, 这就产生矛盾.）

44. 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 X 的标准正交基，定义如下的算子：

$$T\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x_ke_k\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}x_ke_{k+1}.$$

(1) 试证明 $T\in B(X)$ 并且计算 T 的范数 $\|T\|$;

(2) 试证明 T 是单射并且给出 T^{-1} 的表达式.

（提示： $\|T\|=1$. $T^{-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty}x_ke_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}x_{k+1}e_k$.）

45. 设 $\{e_n\}$ 是 Hilbert 空间 X 的标准正交基，对于任意的自然数 j,k，t_{jk} 定义为：$t_{jk}=\langle Te_j,e_k\rangle$.

(1) 证明

$$Te_j=\sum_{k=1}^{+\infty}t_{jk}e_k,$$

并且对于任意的 $j\in\mathbf{N}$，有 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|t_{jk}|^2<+\infty$；

(2) 矩阵 (t_{jk}) 称为算子 T 关于标准正交基 $\{e_k\}$ 的矩阵表示. 如果算子 A，$B\in B(X)$ 分别具有矩阵表示 (a_{jk}) 和 (b_{jk})，试求出算子 $A+B$ 和 AB 的矩阵表示.

(提示：　利用定理 1.52. $A+B=(a_{jk}+b_{jk})$，$AB=\left(\sum\limits_{l=1}^{+\infty}b_{jl}a_{lk}\right)$.)

46. 设 X 是 Banach 空间，$T:D(T)\subset X\to X$ 是闭的线性算子，如果 $A\in B(X)$，证明 $A+T$ 和 TA 是闭的线性算子.

(提示：(1) 先证 $T+A$ 是闭的. 设 $\{x_n\}\subset D(T+A)=D(T)$，$x_n\to x$，而且 $(T+A)x_n\to y$. 仅需证明 $x\in D(T+A)$，而且 $(T+A)x=y$. 由于 $A\in B(X)$，所以 $Ax_n\to Ax$. 结合 $(T+A)x_n\to y$ 知，$Tx_n\to y-Ax$. 因为 T 是闭的，所以 $x\in D(T)=D(T+A)$，且 $Tx=y-Ax$，即有 $(T+A)x=y$，故 T 是闭的.

(2) 证明 TA 是闭的. 显然 $D(TA)=\{x\in X:\ Ax\in D(T)\}$. 设 $\{x_n\}\subset D(TA)$，$x_n\to x$，而且 $(TA)(x_n)\to y$. 欲证 $x\in D(TA)$ 而且 $(TA)(x)=y$. 因为 $A\in B(X)$，$x_n\to x$，所以 $Ax_n\to Ax$. 由 $(TA)(x_n)\to y$ 知，$T(Ax_n)\to y$，但 T 是闭的，所以 $Ax\in D(T)$ 而且 $T(Ax)=y$. 即就有 $x\in D(TA)$，$(TA)(x)=y$. 故 TA 是闭的.)

47. 定义在 l^2 上的算子 T 为

$$T(x_1,\ x_2,\ \cdots)=(x_2,\ 2x_3,\ 3x_4,\ \cdots),$$

证明 T 是闭的稠定算子.

(提示：$M=\{(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,\cdots):\ r_i\in\mathbf{Q},i=1,2,\cdots,n,n\in\mathbf{N}\}$ 是 l^2 中的稠密子集，而且 $M\subset D(T)$，故 $\overline{D(T)}=l^2$. 另外，设 $\xi_k=(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots)\in D(T)$，$\xi_k\to\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，$T\xi_k=(\xi_2^{(k)},2\xi_3^{(k)},3\xi_4^{(k)},\cdots)\to\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$. 欲证 $\xi\in D(T),T\xi=\eta$. 依 l^2 的收敛性可知，$\xi_i^{(k)}\to\xi_i$，$i\xi_{i+1}^{(k)}\to\eta_i(k\to+\infty)$，$i=1,2,\cdots$，因此，$\eta_i=\lim\limits_{k\to+\infty}i\xi_{i+1}^{(k)}=i\lim\limits_{k\to+\infty}\xi_{i+1}^{(k)}=i\xi_{i+1}$，$i=1,2,\cdots$，故 $T\xi=\eta$.)

48. 设 X、Y 是赋范线性空间，$T: X \to Y$ 是闭线性算子，证明 $\ker(T)$ 是 X 的闭子空间.

(提示： 设 $\{x_n\} \subset \ker(T), x_n \to x, Tx_n \to y$, 但 $Tx_n = 0$, 因此 $y = \lim\limits_{n\to+\infty} Tx_n = 0$. 由于 T 是闭的, 故 $Tx = y, Tx = 0$, 所以 $x \in \ker(T)$.)

49. 在 l^2 中定义算子 T 如下 $T(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, 2x_2, 3x_3, \cdots)$, 证明 T 是一个闭的稠定线性算子，而且 $T(D(T)) = l^2$.

(提示： 参照第 47 题，任取 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots) \in l^2$. 令 $\xi = \left(\eta_1, \frac{1}{2}\eta_2, \frac{1}{3}\eta_3, \cdots\right)$, 则 $\xi \in l^2$ 而且 $T\xi = \eta$.)

50. 对于任意的 $h \in \mathbf{R}$, 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上的算子 τ_h 定义为

$$\tau_h f(x) = f(x-h), \quad \forall f(x) \in L^2(\mathbf{R}),$$

证明 τ_h 是有界的.

(提示. $\|\tau_h f(x)\|_2 = \left(\int_R |f(x-h)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} = \left(\int_R |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} = \|f\|_2$.)

51. 设 M 为赋范线性空间 X 的闭子空间，x_0 是 M 中某个弱收敛点列的极限，证明 $x_0 \in M$.

(提示： 用反证法. 设 $x_0 \notin M$, 则 $d = d(x_0, M) > 0$. 由 Hahn-Banach 定理知，必定存在 $f \in X^*$. 使得 $f(x_0) = d, f(x) = 0 (\forall x \in M)$, 但由已知条件可知存在点列 $x_n \in M$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$. 故 $f(x_0) = 0$, 矛盾.)

52. 设 X, Y 为赋范线性空间，$T \in B(X,Y)$. 证明对于任意的 $c > 1$, 存在 $x \in X, \|x\| < c$, 使得 $\|Tx\| = \|T\|$.

(提示： 由 $T \in B(X,Y)$ 知，可以选择 $y \in X, \|y\| = 1$, 使得 $\|Ty\| > \|T\|/c$. 令 $x = \|T\|y/\|Ty\|$ 即可.)

53. 在 $C([-1,1])$ 上，由

$$f(x) = \int_{-1}^{0} x(t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} x(t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall x(t) \in C([-1,1]),$$

定义了线性泛函 f, 求 $\|f\|$.

(提示： $\|f\| = 2$.)

54. 设 X 是一个赋范线性空间，$x \in X, T \in B(X)$, 定义 $g(T) = Tx$, 证明 $g \in B(B(X), X)$, 并且求 $\|g\|$.

(提示： $\|g\| = \|x\|$.)

55. 设 $a \in L^\infty([0,1])$, $(Tu)(x) = a(x)u(x)$, 证明 $T \in B(L^2([0,1]))$, 并且求 $\|T\|$.

(提示: $\|T\| = \|a\|_\infty$. 对于任意的 $\|a\|_\infty > c$, 令 $A = \{x: |f(x)| > c\}$, $u = \chi_A$, 则有 $c^2 mA \le \|Tu\|_2^2 \le \|T\|^2 mA$.)

56. 设 X 是赋范线性空间, $0 \ne f \in X^*$, 则不存在开球 $B_r(a)$, 使得 $f(a)$ 是 f 在 $B_r(a)$ 上的最大值或最小值.

(提示: 如果存在开球 $B_r(a)$ 使得 $f(a)$ 是 f 在 $B_r(a)$ 上的最小值, $f(B_r(a)) = f(a) + r\,f(B_1(0)) \ge f(a)$, 则 $f(B_1(0)) \ge 0$, $f(B_1(0)) = 0$.)

57. 设 X 是赋范线性空间. 对于任意的 $f \in X^*$, $f \ne 0$ 和 $x_0 \in X - \ker(f)$. 证明对于任意的 $x \in X$, 始终存在 $\alpha \in \mathbf{F}$, 使得 x 可以唯一地表示为下面的形式:

$$x = y + \alpha x_0, \quad y \in \ker(f).$$

(提示: $x - f(x)x_0/f(x_0) \in \ker(f)$.)

58. 设 X 是赋范线性空间, f_1, $f_2 \in X^*$, 而且 $\ker(f_1) = \ker(f_2)$, 证明存在常数 c, 使得 $f_1 = c\,f_2$.

(提示: 利用第 57 题的结论.)

59. 设 X 和 Y 是 Banach 空间, $T: X \to Y$ 是线性的, 令 $\ker(T) := \{x \in X: Tx = 0\}$.

(1) 如果 $T \in B(X,Y)$, 证明 $\ker(T)$ 是 X 的闭线性子空间;

(2) 问 $\ker(T)$ 是 X 的闭线性子空间能否推出 $T \in B(X,Y)$?

(3) 如果 f 是线性泛函, 证明 $f \in X^*$, 当且仅当 $\ker(f)$ 是 X 的闭线性子空间.

(提示: 说明 $\overline{\ker(T)} = \ker(T)$. 不一定, 考虑 $C^1([0,1])$ 上的微分算子 d/dt. 用反证法证明充分性. 设 $\ker(f)$ 是 X 的闭线性子空间. 假设 f 不是有界的, 则 $\|f\| = +\infty$. 因此, 必有一个点列 $\{x_n\}$ 适合 $\|x_n\| = 1$, $|f(x_n)| > n$. 记 $y_n = x_n/f(x_n) - x_1/f(x_1)$. 则 $f(y_n) = 0$. 因此, $y_n \in \ker(f)$. 但是, 由于 $\|x_n/f(x_n)\| = 1/|f(x_n)| < 1/n \to 0$, 这样就有 $y_n \to -x_1/f(x_1)$, 但 $f(-x_1/f(x_1)) = -1$, 所以 $-x_1/f(x_1) \notin \ker(f)$, 这与 $\ker(f)$ 为闭集的事实矛盾.)

60. 设 $f(x) = \int_0^1 x(t^\alpha)\,dt$, $x \in L^2([0,1])$, $0 < \alpha < 2$, 证明 $f \in (L^2([0,1]))^*$, 并且求 $\|f\|$.

(提示: $f(x) = \langle x, y\rangle$, $y(t) = t^{(1-\alpha)/\alpha}/\alpha$, $\|f\| = \|y\|_2 = 1/\sqrt{\alpha(2-\alpha)}$.)

61. 对于 $x \in C([0,1])$, 令 $f(x) = \alpha x(1/3) + \beta x(2/3)$, 证明 $f \in (C([0,1]))^*$, 并且求 $\|f\|$.

(提示: $\|f\| = |\alpha| + |\beta|$.)

62. 证明在 Hilbert 空间 X 中 $\{x_n\}$ 强收敛于 x, 当且仅当 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 而且 $\|x_n\| \to \|x\|$.

(提示: $\{x_n\}$ 强收敛于 x, 当且仅当 $\|x_n - x\| \to 0$.)

63. 算子 T: $l^2 \longrightarrow l^2$ 定义为

$$Tx = (0,\ 0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots),\quad x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots) \in l^2,$$

请问 T 是有界的吗? T 是自伴的吗? 试求满足 $T = S^2$ 的算子 S: $l^2 \longrightarrow l^2$.

(提示: T 是有界的. T 不是自伴的. $Sx = (0,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \cdots)$.)

64. 设 X, Y 是 Hilbert 空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n\}$ 是 X 和 Y 的标准正交系. 定义算子

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle \epsilon_k, \quad \forall x \in X.$$

证明 $T \in B(X, Y)$, 而且 $\|T\| = \max\{|\lambda_k|:\ k = 1, 2, \cdots, n\}$.

(提示: 对于 $x \in X$,

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 |\langle x, e_k\rangle|^2 \\ &\le \max\{|\lambda_k|^2:\ k = 1, 2, \cdots, n\}\|x\|^2. \end{aligned}$$

因此, $\|T\| \le \max\{|\lambda_k|:\ k = 1, 2, \cdots, n\}$. 选取 $k_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 使得 $|\lambda_{k_0}| = \max\{|\lambda_k|:\ k = 1, 2, \cdots, n\}$. 所以 $\|Te_{k_0}\| = |\lambda_{k_0}|$, 从而有 $\|T\| \ge |\lambda_{k_0}|$.)

65. 设 X 是 Hilbert 空间, $T \in B(X)$ 是有限秩算子, 证明一定存在 $a_k, b_k \in X, k = 1, 2, \cdots, n$, 使得对于任意的 $x \in X$ 有: $Tx = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, a_k\rangle b_k$.

(提示: 设 $\{e_k:\ k = 1, 2, \cdots, n\}$ 是 $R(T)$ 的标准正交基, 对于任意的 $x \in X$, 设 $Tx = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$, 则 $\alpha_k = \langle Tx, e_k\rangle = \langle x, T^* e_k\rangle$. 故 $Tx = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, T^* e_k\rangle e_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, a_k\rangle b_k$, 其中 $a_k = T^* e_k, b_k = e_k$.)

66. 对于 $u \in L^2([0,1])$, 定义算子 $Tu = v$, 其中当 $x < 1/2$ 时, $v(x) = u(x)$, 当 $x > 1/2$ 时, $v(x) = 0$. 证明 $T \in B(L^2([0,1]))$, 并且求 $\|T\|$.

(提示: 令 $A = [0,1/2]$, 则 $Tu = \chi_A u, \|T\| = 1$.)

67. 设 $a = \{a_i\}$, $Tx = \{a_i x_i\}$, 证明 $T \in B(l^2)$, 当且仅当 $a \in l^\infty$. 当 $a \in l^\infty$ 时, 求 $\|T\|$.

(提示: $\|T\| = \|a\|_\infty$.)

68. 设 $(Tx)(t) = t\,x(t), (Sx)(t) = t\int_0^1 x(s)\,\mathrm{d}s, x \in C([0,1])$, 求 $\|T\|, \|S\|, \|TS\|$ 和 $\|ST\|$.

(提示: $\|T\| = \|S\| = \|TS\| = 2\|ST\| = 1$.)

69. 设 $Tu(x) = \int_0^1 \sin[\pi(x-y)]\,u(y)\,\mathrm{d}y$, 证明 $T \in B(C([0,1]))$, 并且求 $\|T\|$.

(提示: $\|T\| = 2/\pi$.)

70. 设 X, Y 是赋范线性空间, $T: X \to Y$ 是闭线性算子, 若 $A \subset X$ 是紧集, 证明 $T(A)$ 是闭集.

(提示: 任取点列 $Tx_n \to y, \{x_n\} \subset A$. 但因 A 是紧的, 所以存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $x_{n_k} \to x_0 \in A$. 自然地有, $Tx_{n_k} \to y$, 考虑到 T 是闭线性算子得到 $Tx_0 = y$, 故 $y \in T(A)$.)

71. 设 X 是赋范线性空间, x_n, $x_0 \in X$, 而且 x_n 弱收敛到 x_0, 证明 $x_0 \in \overline{\mathrm{span} x_n}$.

(提示: 反证法, 利用 Hahn-Banach 定理.)

72. 设 $T: L^1(-\infty,+\infty) \to C_0(-\infty,+\infty)$, $f(x) \to \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$, 试求 $\|T\|$.

(提示: 证明 $\|T\| > 1$ 时, 选取 $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, 则有 $\|f\|_1 = \|Tf\|_\infty = 2$. $\|T\| = 1$.)

73. 设 X, Y 是赋范线性空间, $\dim X = +\infty$, $Y \neq \{0\}$, 则存在无界线性算子 $T: X \to Y$.

(提示: 设 $\{x_k: k \in \mathbf{N}\}$ 是 X 的线性无关的子集. 无妨假设 $\|x_n\| = 1$, 任取 $0 \neq y_0 \in Y$, 定义算子 T: $Tx_n = n\,y_0$, 在 $X - \mathrm{span}\{x_k: k \in \mathbf{N}\}$ 上令 $Tx = 0$, 则 T 是无界线性算子.)

74. 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的有界线性算子使得 $\|T\| = 1$, 如果存在点 $x_0 \in X$ 满足 $Tx_0 = x_0$, 证明 $T^* x_0 = x_0$.

(提示: 参看第 42 题.)

75. 在空间 $C([0,1])$ 中作出一个弱收敛但不强收敛的点列.

(提示. 令 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, $n=1,2,\cdots$. 对于任意的 $x\in[0,1]$, 显然有 $f_n(x)\to 0$. 利用高等数学中求最大值的方法可以证明: $\|f_n\|=1/2$, $n=1,2,\cdots$. 因此, 点列 f_n 弱收敛于 0, 但不强收敛于 0.)

76. 在空间 $L^p([0,\pi])(1<p<+\infty)$ 中作出一个弱收敛但不强收敛的点列.

(提示: 令 $f_n(x)=\operatorname{sgn}(\sin(nx))|\sin(nx)|^{2/p}$, 则 $\|f_n\|_p=\left[\int_0^\pi \sin^2(nx)\,\mathrm{d}x\right]^{1/p}=(\pi/2)^{1/p}$. 对于任意的 $t\in[0,\pi]$, 有 $\int_0^t f_n(u)\,\mathrm{d}u\to 0$. 因此, 点列 f_n 弱收敛于 0, 但显然 f_n 不强收敛于 0.)

77. 设 X 是一个复 Hilbert 空间, $T\in B(X)$ 是正算子, 证明对于任意的 x, $y\in X$, 有

$$|\langle Tx,y\rangle|\le\langle Tx,x\rangle^{1/2}\langle Ty,y\rangle^{1/2}.$$

(提示: 由于 T 有唯一的正平方根 S, 即 $T=S^2$, S 是正算子. 所以, $\forall x,y\in X$,

$$\begin{aligned}|\langle Tx,y\rangle| &= |\langle S^2x,y\rangle|=|\langle Sx,Sy\rangle|\\ &\le \|Sx\|\,\|Sy\|=\langle Sx,Sx\rangle^{1/2}\langle Sy,Sy\rangle^{1/2}\\ &= \langle Tx,x\rangle^{1/2}\langle Ty,y\rangle^{1/2}.\end{aligned}$$

)

78. 设 X 是一个 Hilbert 空间, $T\in B(X)$, 并且假设存在正的常数 c, 使得对于任意的 $x\in X$, 恒有

$$|\langle Tx,x\rangle|\ge c\,\|x\|^2,$$

证明 T^{-1} 存在并且 $T^{-1}\in B(X)$.

(提示: (1) T 是单射. 由 $T\in B(X)$ 和 $|\langle Tx,x\rangle|\ge c\,\|x\|^2$, 有 $\langle Tx-Ty,x-y\rangle=\langle T(x-y),x-y\rangle\ge c\,\|x-y\|\,(c>0)$. 由此可知, 若 $Tx=Ty$, 则 $x=y$. 这表明 T 是单射, 故 T^{-1} 存在.

(2) T 是满射. 先证明 $\overline{R(T)}=X$. 如果 $z\in\overline{R(T)}^{\perp}$, 于是, 对于任意的 $x\in X$, 都有 $|\langle Tx,z\rangle|=0$. 特别取 $x=z$, 则有

$$c\,\|z\|^2\le|\langle Tz,z\rangle|=0.$$

因此，$z=0$. 所以 $R(\overline{T})=X$.

再证明 $R(T)$ 是闭集. 设 $y\in R(T)$，则存在 $y_n\in R(T)$，使得 $y_n\to y$. 于是，存在 $x_n\in X$，使得 $y_n=Tx_n$. 由给定的条件可以得到

$$\begin{aligned} c\|x_m-x_n\|^2 &\le |\langle T(x_m-x_n),x_m-x_n\rangle| \\ &= |\langle y_m-y_n,x_m-x_n\rangle| \\ &\le \|y_m-y_n\|\,\|x_m-x_n\|. \end{aligned}$$

即得

$$\|x_m-x_n\|\le\frac{1}{c}\|y_m-y_n\|.$$

因为 $\{y_n\}$ 是基本列，因此 $\{x_n\}$ 也是基本列. 但空间 X 是 Hilbert 空间，因而有 $x\in X$，使得 $x_n\to x$. 由 T 的连续性就有 $Tx=\lim\limits_{n\to+\infty}Tx_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=y$ 这就说明 $y\in R(T)$，从而知 $R(T)$ 是闭集. 结合前面的证明可知，$X=\overline{R(T)}=R(T)$.

(3) 由于 T 是从 X 到 X 的一个双射，由 Banach 逆算子定理可知，T^{-1} 存在并且有界.)

79. 设 X 是一个 Hilbert 空间，对于任意的 a、$b\in X$，定义算子 $T_{a,b}$ 如下

$$T_{a,b}x=\langle x,b\rangle\,a,\quad \forall x\in X,$$

(1) 证明 $T_{a,b}\in B(X)$;

(2) 当 a，$b\neq 0$ 时，计算 $\dim(T_{a,b}(X))$ 和 $\|T_{a,b}\|$;

(3) 给出 $T_{a,b}^*$ 的表达式;

(4) 如果 $T\in B(X)$ 具有一维值域，证明一定存在 a，$b\in X$，使得 $T=T_{a,b}$.

(提示：对于任意的 $x\in X$，有 $\|T_{a,b}(x)\|=\|\langle x,b\rangle a\|=|\langle x,b\rangle|\,\|a\|\le\|a\|\,\|b\|\,\|x\|$. 因此，$\|T\|\le\|a\|\,\|b\|$. 故 $T_{a,b}\in B(X)$. 特别地，令 $x=b/\|b\|$，则有 $\|x\|=1$，$\|T_{a,b}(x)\|=\|a\|\,\|b\|$. 因而，$\|T_{a,b}\|=\|a\|\,\|b\|$. 显然有 $\dim(T_{a,b}(X))=1$.

对于任意的 $x,y\in X$，有

$$\begin{aligned} \langle T_{a,b}(x),y\rangle &= \langle\langle x,b\rangle a,y\rangle=\langle x,b\rangle\langle a,y\rangle \\ &= \langle x,\langle a,y\rangle b\rangle=\langle x,\langle y,a\rangle b\rangle. \end{aligned}$$

所以，$T^*_{a,b}(y)=\langle y,a\rangle b,\forall y\in X$.

设 $\{b\}$ 是 $R(T)$ 的标准正交基，$x\in X$ 而且 $Tx=\alpha b$，则 $\alpha=\langle Tx,b\rangle=\langle x,T^*b\rangle$. 故 $Tx=\langle x,T^*b\rangle b=\langle x,a\rangle b$，其中 $a=T^*b$. ）

80. 定义算子 T： $l^2\to l^2$ 如下：

$$T(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)=\left(\frac{1}{2}x_2,\frac{2}{3}x_3,\cdots,\frac{n}{n+1}x_n,\cdots\right).$$

(1) 确定 T 的范数 $\|T\|$；

(2) 给出 T 的全部特征值 $\sigma_p(T)$ 及其相应的特征向量；

(3) 确定 T^* 、 $\sigma_p(T^*)$ 和 $\rho(T)$.

（提示： (1)

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \|T(x_1,x_2,\cdots)\|=\left\|\left(\tfrac{1}{2}x_2,\tfrac{2}{3}x_3,\cdots,\tfrac{n}{n+1}x_n\right),\cdots)\right\|\\ &= \left[\left(\tfrac{1}{2}x_2\right)^2+\left(\tfrac{2}{3}x_3\right)^2+\cdots\right]^{1/2}\\ &\le [x_1^2+x_2^2+\cdots]^{1/2}=\|x\|.\end{aligned}$$

因此，$\|T\|\le 1$. $\|Te_n\|=\|(0,\cdots,n/(n+1),0,\cdots)\|=n/(n+1)\to 1$. 故 $\|T\|=1$. (2) $(\lambda I-T)x=\left(\lambda x_1-\frac{1}{2}x_2,\lambda x_2-\frac{2}{3}x_3,\lambda x_3-\frac{3}{4}x_4,\cdots\right)=0\Rightarrow\lambda x_1=\frac{1}{2}x_2,\lambda x_2=\frac{2}{3}x_3,\cdots\Rightarrow x_2=2\lambda x_1,x_3=3\lambda^2x_1,x_4=4\lambda^3x_1,\cdots$. 当 $|\lambda|<1$ 时，有 $(1,2\lambda,3\lambda^2,4\lambda^3,\cdots)\in l^2$. 所以，$\sigma_p(T)=\{\lambda: \lambda\in\mathbf{C}, |\lambda|<1\}$, $E_\lambda=\{(\alpha,2\alpha\lambda,3\alpha\lambda^2,\cdots): \alpha\in\mathbf{C}\}$. (3) $T^*(x_1,x_2,\cdots)=\left(0,\frac{1}{2}x_1,\frac{2}{3}x_2,\cdots,\frac{n}{n+1}x_{n+1},\cdots\right)$. $\sigma_p(T^*)=\emptyset$. $\rho(T)=\{\lambda. \lambda\in\mathbf{C},|\lambda|>1\}$. ）

81. 对于 $\{x_n\}\in l^2$, 我们定义如下的序列：

$$y_n=x_{n+1}+n\,x_n+x_{n-1},\quad x_0=0.$$

(1) 证明 $y\in l^2$, 当且仅当 $\{n\,x_n\}\in l^2$；

设 $D=\{x\in l^2: \{n\,x_n\}\in l^2\}$, 定义线性算子 T： $D\to l^2$, 为 $Tx=y$,

(2) 证明 D 在 l^2 中稠密；

(3) 证明 T 是自伴的.

（提示： (1) 因为

$$\begin{aligned}y &= (y_1,y_2,\cdots)=(x_1+x_2,x_1+2x_2+x_3,x_2+3x_3+x_4,\cdots)\\ &= (0,x_1,x_2,\cdots)+(x_1,2x_2,3x_3,\cdots)+(x_2,x_3,x_4,\cdots),\end{aligned}$$

所以, $y \in l^2 \Leftrightarrow \{nx_n\} \in l^2$. (2) $M = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, \cdots):$ $r_1, r_2, \cdots, r_n \in \mathbf{Q}, n = 1, 2, \cdots\} \subset D$.)

82. 在空间 l^1 中定义算子 $T: l^1 \to l^1$, $T(x_1, x_2, \cdots) = (0, -x_1, -x_2, \cdots)$, 试证明 $\rho(T) = \{\lambda: \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| > 1\}$, $\sigma(T) = \{\lambda: \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \leq 1\}$, 而且 $\sigma_p(T) = \emptyset$.

(提示: 由于

$$\|Tx\| = \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k| = \|x\|,$$

因此, T 是有界线性算子并且 $\|T\| = 1$. 从而当 $|\lambda| > \|T\| = 1$ 时, $\lambda \in \rho(T)$.

设 $(\lambda I - T)x = 0$, 即 $(\lambda x_1, \lambda x_2 + x_1, \lambda x_3 + x_2, \cdots, \lambda x_n + x_{n-1}, \cdots) = 0$, 因此, $\lambda x_1 = 0$. 若 $\lambda = 0$, 则由 $\lambda x_2 + x_1 = 0$ 知 $x_1 = 0$, 依次得到 $x_1 = x_2 = \cdots = 0$ 若 $\lambda \neq 0$, 则 $x_1 = 0$, 由 $\lambda x_2 + x_1 = 0$ 可得 $x_2 = 0$, 依次得到 $x_1 = x_2 = \cdots = 0$. 所以对于任何 λ, 方程 $(\lambda I - T)x = 0$ 都只有零解. 这表明 T 没有特征值.

考察 $|\lambda| \leq 1$ 时的情况. 若 $\lambda = 0$, 则 $R(\lambda I - T) = R(T) \neq l^1$. 设 $0 < |\lambda| \leq 1$, 考察方程 $(\lambda I - T)x = y$. 取 $y = (\alpha, 0, \cdots), \alpha \neq 0$, 则有

$$x_1 = \frac{\alpha}{\lambda}, x_2 = -\frac{\alpha}{\lambda^2}, \cdots, x_n = (-1)^{n-1}\frac{\alpha}{\lambda^n}, \cdots.$$

因为级数 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_k| = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|\lambda|^n}|\alpha|$ 是发散的, 所以不存在 $x \in l^1$ 满足此方程, 故 $R(\lambda I - T) \neq l^1$. 因此, 当 $|\lambda| \leq 1$ 时, $\lambda \in \sigma(T)$.)

83 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的紧算子, λ 是 T 的非零特征值, 则与 λ 对应的特征向量空间 $E_\lambda := \{x \in H: Tx = \lambda x\}$ 是有限维的.

(提示: 用反证法来证明. 假设 E_λ 是无限维的, 则一定存在标准正交点列 $\{x_n\}$, 对于任意的 $n \neq m$, 使得

$$\|Tx_n - Tx_m\|^2 = |\lambda|^2 \|x_n - x_m\|^2 = 2|\lambda|^2 > 0,$$

因此, 点列 $\{Tx_n\}$ 不可能含有收敛子列, 这就说明 T 不可能是紧算子.)

84. 设 $T: l^2 \to l^2$ 是下面的线性算子:

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_{2n-1}, x_{2n}, \cdots) = \left(x_2, x_1, \frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_3, \cdots, \frac{1}{n}x_{2n}, \frac{1}{n}x_{2n-1}, \cdots\right),$$

(1) 确定 $\|T\|$;

(2) 确定 T^*;

(3) 给出 T 的谱和预解集, 对于 $\lambda \in \sigma_p(T)$ 确定特征空间的基向量;

(4) 证明 T 是紧的.

(提示: 因为 $\|T(x_1,x_2,\cdots)\| \leq \|x\|$, 所以, $\|T\| \leq 1$. 但因 $\|Te_1\| = \|e_2\| = 1$, 故 $\|T\| = 1$. $T^* = T$. 定义

$$T_n x = \left(x_2, x_1, \frac{1}{2}x_4, \frac{1}{2}x_3, \cdots, \frac{1}{n}x_{2n}, \frac{1}{n}x_{2n-1}, 0, 0, \cdots\right),$$

因此, $T_n \to T$. 所以 T 是紧的. $\sigma_p(T) = \{1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$. 对于 $\lambda = 1/n$, 特征空间 E_λ 的基向量为 $(0, \cdots, 0, 1, 1, 0, \cdots)$, 第 $2n$ 和 $2n-1$ 位置是 1 其余位置为 0. $\sigma(T) = \{0, 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$. $\rho(T) = \mathbf{C} - \{0, 1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$.)

85. Hilbert 空间 $L^2([0,1])$ 是内积空间 X 的完备化空间, X 是由 $[0,1]$ 上的所有连续函数构成的空间, 其上的内积定义为

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t,$$

定义算子 T: $L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ 为 $(Tx)(t) = y(t) = t\,x(t)$, 试证明

(1) T 是自伴算子;

(2) T 没有特征值.

(提示: $T|_X$ 的自伴性由 t 是实的便可以推出, 并且对于 $L^2([0,1])$ 上的 T, 其自伴性也可以由内积的积分表示推出, 这里的积分是一个勒贝格积分. $R(\lambda;T)x(t) = (t-\lambda)^{-1}x(t)$ 说明了 $\sigma(T) = [0,1]$, 并且对于 $\lambda \in [0,1]$, 可以看出

$$T_\lambda\, x(t) = (t-\lambda)\,x(t) = 0,$$

因此, 对于一切 $t \neq \lambda$ 有 $x(t) = 0$, 即就是说 $x \equiv 0$, 所以 λ 不可能是 T 的特征值.)

86. 若 X, Y 是 Banach 空间, $\dim(Y) = +\infty$, $T \in K(X,Y)$, 则存在 $y \in Y$, 使得方程 $Tx = y$ 无解.

(提示: 否则的话, 则有 $R(T) = Y$. 由开映射定理和定理 3.36 知 $TB_1(0)$ 不是相对紧集.)

87. 如果 T 是从 Hilbert 空间到其真子空间 $Y \neq \{0\}$ 上的投影算子, 试求

$$m = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle, \quad M = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle.$$

(提示： $m = 0$, $M = 1$.)

88. 证明复 Hilbert 空间 $X \neq \{0\}$ 上的有界自伴算子的谱是非空的.

(提示： 因为 $X \neq \{0\}$, 仅证 $M \in \sigma(T)$. 无妨设 $0 \leq m \leq M$(否则用 $T - mI$ 代替 T), 则 $M = \|T\| = r_\sigma(T)$. 但 $\sigma(T)$ 是闭集，故 $M \in \sigma(T)$.)

89. 证明复 Hilbert 空间 $X \neq \{0\}$ 上的紧自伴算子 $T: X \longrightarrow X$ 至少有一个特征值.

(提示： $T = 0$ 有特征值 0 设 $T \neq 0$, 则 m 与 M 不全为零，但对于紧算子来说非零的谱点一定是特征值.)

90. 求一个线性算子 $T: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, 使得满足 $T^2 = I$, 其中 I 为恒等算子，并且指出哪一个是 I 的正平方根.

(提示：

$$I^{1/2} = I, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad)$$

91. 设 $T: L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$ 是用 $(Tx)(t) = t\,x(t)$ 定义的算子，证明 T 是自伴的和正的，并且求它的正平方根.

(提示： $S = T^{1/2}$, 定义为 $(Sx)(t) = t^{1/2}x(t)$.)

92. 设 $T: l^2 \longrightarrow l^2$ 是用 $(\xi_1, \xi_2, \cdots) \longrightarrow (0, 0, \xi_3, \xi_4, \cdots)$ 定义的算子，问 T 是有界的吗？自伴的吗？正的吗？并求 T 的平方根.

(提示： T 是有界的. T 是自伴的. T 是正算子. $Sx = (0, 0, \xi_3, \xi_4, \cdots)$.)

93. 如果 T 和 S 是复 Hilbert 空间 X 上的正自伴算子，而且 $S^2 = T^2$, 证明 $S = T$.

(提示： 复 Hilbert 空间 X 上的每一个正自伴算子 $T: X \longrightarrow X$ 都有唯一的正平方根.)

94. 如果算子 $T: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ 相对于 $\mathbf{R}^3$ 的一个标准正交基的矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试问 T 的谱族是什么？

(提示： 如果 $\lambda < -1$, 则 $E_\lambda = 0$. 如果 $-1 \leq \lambda < 1$, 则 E_λ 是到直线 $\xi_2 = -\xi_1$, $\xi_3 = 0$ 上的投影. 如果 $\lambda \geq 1$, 则 $E_\lambda = I$.)

95. 求用 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots) \longrightarrow (\xi_1/1, \xi_2/2, \xi_3/3, \cdots)$ 所定义的算子 T: $l^2 \longrightarrow l^2$ 的谱族，求一个标准正交的特征向量组，此时，谱定理取什么形式？

(提示： T 是紧的和自伴的. 对应于特征向量 $x_k = (\delta_{kn})$ 的特征值是 $\lambda_k = 1/k\,(k = 1, 2, \cdots)$. 这些特征向量构成一个标准正交序列. E_λ 是到所有满足 $\lambda_k \le \lambda$ 的 λ_k 的特征向量 x_k 张成的子空间的闭包上的投影.)

96. 设数列 $\{\alpha_n\} \to 0$. 在 l 中定义算子 T 为： $Tx = y$, 其中 $x = (\xi_n) \in l, y = (\alpha_n \xi_n)$, 证明 T 为紧算子.

(提示： 令 $T_n x = (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \cdots, \alpha_n\xi_n, 0, \cdots)$, 则 T_n 是 l 上的有限秩算子. 由于 $\{\alpha_n\} \to 0$, 因而，对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 n_0, 使得当 $n > n_0$ 时，有 $|\alpha_n| < \varepsilon$. 因此，当 $n > n_0$ 时有： $\|(T_n - T)x\| < \varepsilon\|x\|$. 所以 $\|T_n - T\| \to 0$, 故 T 为紧算子.)

97. $L^2(\mathbf{R})$ 上的算子 T 定义为： $Tf(x) = xf(x)$, T 的定义域为： $D(T) = \{f \in L^2(\mathbf{R}): \ Tf \in L^2(\mathbf{R})\}$, 试求 $\rho(T)$ 和 $\sigma_p(T)$.

(提示： 当 $\lambda \in \mathbf{R}$ 时，算子 $(\lambda I - T)f(x) = (\lambda - x)f(x)$ 有定义在全空间上的有界逆算子 $R_\lambda f(x) = f(x)/(\lambda - x)$, 因此 λ 是 T 的正则值. 若 $\lambda \in \mathbf{R}$, 则 $\lambda I - T$ 的值域不是全空间，因此， $\lambda \in \sigma(T)$. 由 $(\lambda I - T)f(x) = 0 \Rightarrow \lambda f(x) = xf(x) \Rightarrow f(x) \equiv 0$, 所以 $\sigma(T) = \mathbf{R}, \sigma_p(T) = \emptyset$.)

98. 在 l^2 中定义算子 T 如下：

$$T: \ (x_1, \ x_2, \ \cdots) \to \left(x_1, \ \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \ \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3), \ \cdots, \right.$$
$$\left. \frac{1}{2^{n-1}}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \ \cdots\right),$$

证明该算子 T 是有界的但不是满的.

(提示：

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 &= |x_1|^2 + |x_1 + x_2|^2/4 + |x_1 + x_2 + x_3|^2/16 + \cdots \\
&\le |x_1|^2 + (|x_1| + |x_2|)^2/4 + (|x_1| + |x_2| + |x_3|)^2/16 + \cdots \\
&\le |x_1|^2 + 2(|x_1|^2 + |x_2|^2)/4 + 4(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2)/16 + \cdots \\
&= (|x_1|^2 + |x_1|^2/2 + |x_1|^2/4 + \cdots) + (|x_2|^2/2 + |x_2|^2/4 + \cdots) + \cdots \\
&= 2|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2/2 + \cdots \\
&\le 2(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots = 2\|x\|_2^2.
\end{aligned}$$

因此，T 是有界的. 对于 $\eta=(1,0,1/2,0,1/4,\cdots)\in l^2$. 假设 $Tx=\eta$, 则有

$$\begin{cases} x_1=1, \\ (x_1+x_2)/2=0, \\ (x_1+x_2+x_3)/4=1/2, \\ (x_1+x_2+x_3+x_4)/8=0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$\Rightarrow x_1=1, x_2=-1, x_3=2, x_4=-2,\cdots$. 但是 $x=(1,-1,2,-2,\cdots)\notin l^2$.)

99. 设 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 X 的一组标准正交基, 定义下述点列:

$$f_0=e_1,\quad f_k=e_{2k+1},\quad \forall k>0;\quad f_k=e_{-2k},\quad \forall k<0.$$

则 $\{f_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 是一个标准正交集. 定义双侧移位算子 S 为

$$S\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kf_k\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kf_{k+1}.$$

(1) 证明 S 是一个有界算子;

(2) 证明 S 没有特征值.

(提示:

$(\lambda I-S)\left(\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}a_kf_k\right)=0\Rightarrow\lambda\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}a_kf_k=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}a_kf_{k+1}\Rightarrow\lambda a_{k+1}=a_k$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|\lambda^{-k}a_0|^2=|a_0|^2\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|\lambda^{-k}|^2\Rightarrow a_0=0\Rightarrow\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}a_kf_k=0$.)

100. 对于任意的 $h\in\mathbf{R}$, 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上的算子 τ_h 定义为

$$\tau_hf(x)=f(x-h),\quad \forall f\in L^2(\mathbf{R}),$$

证明 τ_h 没有特征值, 而且

$$\sigma(\tau_h)\subset\{z\in\mathbf{C}:\quad |z|=1\}.$$

(提示:　$(\lambda I-\tau_h)f(x)=0\Leftrightarrow\lambda f(x)=f(x-h)\Leftrightarrow f\equiv 0$, 所以 $\sigma_p(\tau_h)=\emptyset$.)

101. 定义算子 T： $l^2 \longrightarrow l^2$，$Tx = y = (\eta_n)$，$x = (\xi_n)$，$\eta_n = \lambda_n \xi_n$，其中 $\{\lambda_n\}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个有界序列，而且 $a = \inf \lambda_n$，$b = \sup \lambda_n$. 证明每个 λ_n 都是 T 的特征值，在什么条件下会有 $\sigma(T) \supset [a,\ b]$？

（提示： $Tx = \lambda_j x$，其中 $x = (\xi_n)$，$\xi_n = \delta_{nj}$，如果 $\{\lambda_j\}$ 在 $[a,\ b]$ 上稠密，则 $\sigma(T) \supset [a,\ b]$. 这是因为 $\sigma(T)$ 是闭的.）

102. 设 $T \in B(X)$，证明当 $\lambda \to +\infty$ 时 $\| R(\lambda; T) \| \longrightarrow 0$.

（提示： 设 $|\lambda| > \| T \|$ 而且 $y = T_\lambda x$，则

$$\| y \| = \| \lambda x - Tx \| \geq |\lambda| \| x \| - \| Tx \| \geq (|\lambda| - \| T \|) \| x \|,$$

因此，$\| R(\lambda; T) \| = \sup\limits_{y \neq 0} (\| x \| / \| y \|) \leq 1/(|\lambda| - \| T \|)$.）

103. 设 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 X 的一组标准正交基，定义算子 T 如下

$$T\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{k+1},$$

求出 T^* 并且证明 T^* 是 T^{-1} 的一个扩张.

（提示： 直接按 T^* 的定义计算.）

104. 设 $T \in B(X)$，证明 T 能够被表达为 $T = A + \mathrm{i}B$，其中 A 和 B 都是自伴算子并且是唯一的.

（提示： $A = (T + T^*)/2$，$B = (T - T^*)/(2\mathrm{i})$.）

105. 设 X 是复 Hilbert 空间，证明 $T \in B(X)$ 是自伴的，当且仅当 $\langle Tx, x\rangle \in \mathbf{R}$，$\forall x \in X$. 请说明此结论对于实 Hilbert 空间不一定成立.

（提示： 利用算子极化恒等式

$$\begin{aligned}\langle Tx, y\rangle &= \frac{1}{4}[\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ &\quad + \mathrm{i}\langle T(x+\mathrm{i}y), x+\mathrm{i}y\rangle - \mathrm{i}\langle T(x-\mathrm{i}y), x-\mathrm{i}y\rangle].\end{aligned}$$

考察

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

）

106. 设 T 和 S 是 Hilbert 空间上的自伴算子，证明 $ST + TS$ 和 $\mathrm{i}(ST - TS)$ 是自伴的.

（提示： 直接按自伴算子的定义验证.）

107. 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上的算子 T 定义为

$$Tf(x) = x f(x),$$

T 的定义域为

$$D(T) = \{f \in L^2(\mathbf{R}): \quad Tf \in L^2(\mathbf{R})\},$$

证明 T 是自伴的.

(提示: 直接按自伴算子的定义验证.)

108. 设 $\{e_k\}$ 是复 Hilbert 空间 X 的一组标准正交基, $\{r_k\}$ 是 $(0,1)$ 中全体有理数的排列, 定义如下的算子

$$T\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} r_k a_k e_k,$$

(1) 证明 T 是自伴的并且 $\|T\| = 1$.

(2) 试问 T 的预解集、T 的点谱和 T 的连续谱是什么?

(提示:

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 &= \left\|T\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k e_k\right)\right\|^2 \\
&= \left\|\sum_{k=1}^{+\infty} r_k a_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} |r_k a_k|^2 \\
&\le \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 = \|x\|^2.
\end{aligned}$$

$$T^*\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{r_k} a_k e_k = \sum_{k=1}^{+\infty} r_k a_k e_k.$$

$Te_k = r_k e_k \Rightarrow \{r_k\} \subset \sigma_p(T)$. 由于 $\sigma(T)$ 是闭的, 所以 $\sigma(T) \supset [0,1]$, $\|T\| \ge 1$. 故 $\sigma(T) = [0,1]$, $\|T\| = 1$. 但因复 Hilbert 空间 X 上自伴线性算子的剩余谱 $\sigma_r(T)$ 是空集, 因此, $\sigma_c(T) = [0,1] - \{r_k\}$.)

109. 证明 $r_\sigma(TS) = r_\sigma(ST)$.

(提示: 注意到 $(TS)^n = T(ST)^{n-1}S$. 由谱半径公式可得 $r_\sigma(TS) \le r_\sigma(ST)$.)

110. 设 $Tx=(0,x_1,x_2,\cdots)$, 则 $T\in B(l^p)(1\le p<+\infty)$, $\sigma_p(T)=\emptyset$.

(提示: $Tx=0\Rightarrow x=0, \lambda\neq 0; Tx=\lambda x\Rightarrow x=0$.)

111. 设 X 是复 Hilbert 空间, $T=T^*\in B(X)$, 则 $\ker(T)=R(T)^\perp$.

(提示: $\ker(T)=R(T^*)^\perp$.)

112. 设 X 是复 Hilbert 空间, $T=T^*\in K(X)$, $X\neq\{0\}$, 则 $\sigma_p(T)\neq\emptyset$.

(提示: $T=0$ 有特征值 0; 若 $T\neq 0$, $\sigma_p(T)=\emptyset$. 这推出 $\|T\|=r_\sigma(T)=0$.)

113. 设 $Tx=(\alpha_k x_k)$, $\{\alpha_k\}\subset\mathbf{R}$ 并且有界, 则 $T=T^*\in B(l^2)$, $\{\alpha_k\}\subset\sigma_p(T)$.

(提示: $Te_k=\alpha_k e_k$.)

114. 设 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 X 的一组标准正交基, 定义 $T\in B(X)$ 为

$$T\left(\sum_{k=1}^{+\infty}a_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k a_k e_k,$$

证明 T 是酉算子, 当且仅当对于任意的自然数 k 有 $|\lambda_k|=1$.

(提示. $T^*(\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k e_k)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\overline{\lambda_k}a_k e_k$. $T^*T=TT^*=I\Leftrightarrow|\lambda_k|=1$.)

115. 设 T 是 Hilbert 空间 X 上的酉算子, 证明 $\sigma(T)\subset\{z\in\mathbf{C}:|z|=1\}$.

(提示: $\|T^*\|=\|T\|$, $\|T\|^2=\|T^*T\|$, $T^*T=I$, 故 $\|T\|=1$. 对于任意的 $\lambda\in\sigma(T)$ 有 $|\lambda|\le r_\sigma(T)=\|T\|=1$. 另一方面, 由 $1/\lambda\in\sigma(T^{-1})=\sigma(T^*)$ 可得 $1/|\lambda|\le r_\sigma(T^*)=\|T^*\|=1$, 所以 $\|\lambda\|\ge 1$, 从而 $|\lambda|=1$.)

116. 设 X 是 Hilbert 空间, $T\in B(X)$, 如果对于任意的 $x\in X$, 恒有 $\langle Tx,x\rangle\ge 0$, 则称算子 T 是正的, 记作 $T\ge 0$. 证明下述各条成立:

(1) 若 $T\ge 0$, 则 T 是自伴的;

(2) 若 T, $S\ge 0$, $\alpha\ge 0$, 则 $T+\alpha S\ge 0$;

(3) 若 $T\ge 0$, $S\in B(X)$, 则 $S^*TS\ge 0$;

(4) 若 $T\in B(X)$, 则 $T^*T\ge 0$;

(5) 若 T 是一个投影算子, 则 $T\ge 0$.

(提示: 直接验证.)

117. 设 X 是 Hilbert 空间, $T\in B(X)$, 如果对于任意的 $x\in X$, 恒有 $\|Tx\|\le\|x\|$, 则称算子 T 是压缩的. 对于算子 $T\in B(X)$, 证明下述条件等价:

(1) T 是压缩的;

(2) $\|T\| < 1$;

(3) $T^*T < I$;

(4) $TT^* \leq I$;

(5) T^* 是压缩的;

(6) T^*T 是压缩的.

(提示: $\|T\| = \|T^*\|$, $\|T\|^2 = \|T^*T\| = \|TT^*\|$.)

118. 设 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 X 的标准正交基, 算子 T 定义如下:

$$T\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} a_k e_{k-1}.$$

(1) 证明 T 是紧算子并且给出 T^* 的表达式;

(2) 计算 $\sigma_p(T)$ 和 $\sigma_p(T^*)$.

(提示: $T_n\left(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} a_k e_{k-1}$. T_n 是紧的, $T_n \to T$. $\sigma(T) = \{0, 1/2, 1/3, \cdots\}$. $\sigma_p(T) = \{1/2, 1/3, \cdots\}$.)

119. 设 $(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $\forall x \in [a,b]$. 则 $T \in B(C([a,b]))$, 并且求 $\sigma(T)$.

(提示: 因为 $\|T^n\| \leq (b-a)^n/n!$, 所以 $\sigma(T) = \{0\}$.)

120. 定义算子 $T: l^2 \longrightarrow l^2$ 为 $Tx = y = (\eta_n)$, 其中 $x = (\xi_n)$, 而且

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\xi_k, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{nk}|^2 < +\infty,$$

证明 T 是紧的.

(提示: 定义算子 $T_n: l^\infty \longrightarrow l^\infty$, $T_n x = y_n = (\eta_1, \cdots, \eta_n, 0, 0, \cdots)$. 则 T_n 是有界线性算子. 因为 T_n 的值域是有限维的, 所以 T_n 是紧的. 此外, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式可以得到

$$\begin{aligned} &\|(T_n - T)x\|^2 \\ = &\sum_{j=n+1}^{+\infty} |\eta_j|^2 = \sum_{j=n+1}^{+\infty}\left|\sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk}\xi_k\right|^2 \\ \leq &\sum_{j=n+1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{jk}|^2 \sum_{l=1}^{+\infty} |\xi_l|^2. \end{aligned}$$

由此可得 $\|T_n - T\| \longrightarrow 0\,(n \to +\infty)$, 但紧算子列一致收敛的极限也是紧的, 从而 T 是紧的.)

121. 是否存在满射的紧线性算子 $T:\ l^\infty \longrightarrow l^\infty$?

(提示: 否, 因为 l^∞ 是不可分的.)

122. 如果 $T \in B(X)$ 不是紧的, T 在 X 的一个无限维子空间上的限制能否是紧的?

(提示: 是.)

123. 设 $\{\alpha_n\} \subset \mathbf{C}$, 而且 $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, 定义算子 $T:\ l^2 \longrightarrow l^2$, 其中 $x = (\xi_n)$, $\eta_n = \alpha_n \xi_n$, 证明 T 是紧的.

(提示: 设 $T_n x = (\lambda_1 \xi_1, \ \cdots, \ \lambda_n \xi_n, \ 0, \ 0, \ \cdots)$, T_n 的值域是有限维的, 所以 T_n 是紧的. 令 $\varepsilon > 0$, $|\lambda_k| < \varepsilon$, 对于一切 $k > N$ 成立, 从而当 $n > N$ 时, 则有

$$\|T_n x - T x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\lambda_k \xi_k|^2 \le \varepsilon^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\xi_k|^2 \le \varepsilon^2 \|x\|^2,$$

也就是说 $\|T_n - T\| \le \varepsilon$, 因此, T 是紧的.)

124. 证明任一赋范线性空间上的零算子是紧的.

(提示: 值域是有限维的.)

125. 如果 z 是赋范线性空间 X 中的一个固定元, 而且 $f \in X^*$, 定义算子 $T:\ X \longrightarrow X$ 为 $Tx = f(x)\,z$, 证明算子 T 是紧的.

(提示: 因为 f 是线性的, 所以 T 也是线性的. 由于 f 有界, 故有

$$\|Tx\| = |f(x)|\,\|z\| \le C\,\|x\|, \quad C = \|f\|\,\|z\|.$$

因此 T 有界. 由于 $\dim T(X) \le 1$, 可得结论.)

126. 设 X 是一个内积空间, 对于固定的元 y 和 z, 定义线性算子 $T:\ X \longrightarrow X$ 为 $Tx = \langle x, y\rangle z$, 证明 T 是一个紧线性算子.

(提示: T 有界并且 $\dim T(X) \le 1$.)

127. 设 $T_n:\ X_n \longrightarrow X_{n+1}$, $n = 1, \ 2, \ 3$ 是赋范线性空间上的有界线性算子, 如果 T_2 是紧的, 证明 $T = T_3 T_2 T_1:\ X_1 \longrightarrow X_4$ 是紧的.

(提示: 参看定理 6.14.)

128. 设 X 是一个 Hilbert 空间, $T:\ X \longrightarrow X$ 是一个有界线性算子, T^* 是 T 的伴随算子, 证明 T 是紧的, 当且仅当 $T^* T$ 是紧的.

(提示：　如果 T 是紧的，则 T^*T 是紧的. 反过来，如果 T^*T 是紧的，设 $\{x_n\}$ 有界，不妨设 $\|x_n\| \le C$，而且 $\{T^*Tx_{n_k}\}$ 收敛，则对于每一个 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，使得

$$\|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j}\| < \frac{\varepsilon}{2C}, \quad \forall k, j > N,$$

由此可得，当 $k, j > N$ 时，就会有

$$\begin{aligned} & \|Tx_{n_k} - Tx_{n_j}\|^2 \\ = & \ (T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j}, x_{n_k} - x_{n_j}) \\ \le & \ \|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j}\|\|x_{n_k} - x_{n_j}\| \\ \le & \ \|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{n_j}\| 2C < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此，$\{Tx_{n_k}\}$ 收敛，故 T 是紧的.)

129. 如果无限维赋范线性空间 X 上的紧线性算子 $T: X \longrightarrow X$ 关于整个 X 有一个逆，证明这个逆不可能是有界的.

(提示：　无限维赋范线性空间 X 上 I 不可能是紧算子.)

130. 设 $T: X \longrightarrow X$ 是无限维赋范线性空间 X 上的紧线性算子，证明 $0 \in \sigma(T)$.

(提示：　无限维赋范线性空间 X 上 I 不可能是紧算子.)

131. 设算子 $T: l^2 \longrightarrow l^2$ 定义为 $Tx = y = (\eta_k)$，$x = (\xi_k)$，$\eta_{2k} = \xi_{2k}$，$\eta_{2k-1} = 0$，$k = 1, 2, \cdots$，试求 $\ker(T_\lambda^n)$，并且问 T 是紧的吗？

(提示：　若 $\lambda = 0$，则有 $\{x: \xi_{2k} = 0\}$. 若 $\lambda = 1$，则有 $\{x: \xi_{2k-1} = 0\}$. 若 $\lambda \ne 0, 1$，则有 $\{0\}$. 否.)

132. 证明一个 Hilbert 空间 X 到它的一个有限维子空间上的投影是紧的.

(提示：　投影是有界的并且它的值域是有限维的.)

133. 证明由 $Tx = y = (\eta_n)$，其中 $\eta_n = \xi_n/n$，所定义的算子 $T: l^\infty \longrightarrow l^\infty$ 是紧的.

(提示：　定义 $T_n: l^\infty \longrightarrow l^\infty$，如下：对于任意的 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$，$T_nx = (\xi_1, \xi_2/2, \cdots, \xi_n/n, 0, \cdots)$，可以得到

$$\|(T - T_n)x\| = \sup_{j>n} \frac{|\xi_j|}{j} \le \frac{\|x\|}{n+1}.$$

所以，$\|T_n - T\| \le \frac{1}{n+1} \to 0$.)

134. 令 $X = C([0,1])$ 并且定义 $T: \quad X \longrightarrow X$ 为 $Tx = vx$, 其中 $v \in X$ 是给定的, 求 $\sigma(T)$.

(提示: $\sigma(T)$ 是 v 的值域, 但因为 v 是连续的, 在紧集 $[0,1]$ 上有极大值和极小值, 故 $\sigma(T)$ 是一个闭区间.)

135 求一个线性算子 $T: \ C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$, 使得 T 的谱是给定的区间 $[a,b]$.

(提示: $Tx = vx$, 此处 $v(t) = a + (b-a)t$.)

136. 若 Y 是算子 T 对应于特征值 λ 的特征空间, 问算子 T_Y 的谱是什么?

(提示: $\{\lambda\}$.)

137. 设 $T: \ l^2 \longrightarrow l^2$ 是由 $y = Tx$, $x = (\xi_n)$, $y = (\eta_n)$, $\eta_n = \alpha_n \xi_n$ 所定义的算子, 其中 $\{\alpha_n\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密, 求 $\sigma_p(T)$ 及 $\sigma(T)$.

(提示: $\sigma_p(T) = \{\alpha_n\}$, 但因 $\sigma(T)$ 是闭的, 所以 $\sigma(T) = [0,1]$.)

138. 求一个线性算子 $T: \ l^2 \longrightarrow l^2$, 使得 T 的特征值在给定的紧集 $K \subset \mathbf{C}$ 中稠密并且 $\sigma(T) = K$.

(提示. T 的定义参照第 137 题. 由于 $\mathbf{C}$ 是可分的, 所以 K 也是可分的. 设 $\{\alpha_n\}$ 在 K 中稠密, 则 α_n 都是 T 的特征值, 而且 $\sigma(T) = K$.)

139. 设 $X = C([0,\pi])$ 并且定义算子 $T: \ D(T) \longrightarrow X, \ x \longrightarrow x''$ 其中 $D(T) = \{x \in X: \ x', \ x'' \in X, \ x(0) = x(\pi) = 0\}$, 证明 $\sigma(T)$ 不是紧的

(提示: $\lambda = -n^2 (n \in \mathbf{N})$ 是 T 的特征值, 于是 T 的谱无界.)

140. 设 $T: \ l^\infty \longrightarrow l^\infty$ 是由 $Tx = (\xi_2, \ \xi_3, \ \cdots)$, $x = (\xi_1, \ \xi_2, \ \cdots) \in l^\infty$ 定义的算子.

(1) 如果 $|\lambda| > 1$, 证明 $\lambda \in \rho(T)$.

(2) 如果 $|\lambda| < 1$, 证明 λ 是特征值, 并且求特征空间 E_λ.

(提示: (1) $\|T\| = 1$. (2) $T_\lambda x = (\xi_2 - \lambda\xi_1, \ \xi_3 - \lambda\xi_2, \ \cdots) = 0$, $Y = \{x \in X: \ x = (\alpha, \ \alpha\lambda, \ \alpha\lambda^2, \ \cdots), \ \alpha \in \mathbf{C}\}$.)

141. 设 $T: \ l^p \longrightarrow l^p$ 是由 $x \longrightarrow (\xi_2, \ \xi_3, \ \cdots)$ 定义的算子, 其中给定 $x = (\xi_1, \ \xi_2, \ \cdots) \in l^p$, 而且 $1 < p < +\infty$. 如果 $|\lambda| = 1$, 试问 λ 是 T 的一个特征值吗?

(提示: 否, 因为 $(1, \ \lambda, \ \lambda^2, \ \cdots) \notin l^p (p < +\infty)$.)

142. 证明由

$$Tx = \left(\frac{\xi_1}{1}, \ \frac{\xi_2}{2}, \ \frac{\xi_3}{3}, \ \cdots\right), \quad x = (\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \cdots),$$

所定义的算子 T： $l^2 \longrightarrow l^2$ 是紧的，而且 $\sigma_p(T) = \{0\}$.

（提示： 对应于 $\lambda = 0$ 的特征向量是 $(1, 0, \cdots)$. 如果 $\lambda \neq 0$, 则由 $Tx = \lambda x$, 可得 $\xi_{n+1} = n!\lambda^n \xi_1$, 并且由 $x \in l^2$ 可得 $\xi_1 = 0$, 于是 $x = 0$.）

143. 由于紧线性算子可能没有特征值，定义算子

$$Tx = \left(0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots\right), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots),$$

试证明： $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$.

（提示： $Tx = \lambda x, 0 = \lambda\xi_1, \xi_{n-1}/(n-1) = \lambda\xi_n\ (n = 2, 3, \cdots)$, $x = 0$. 每个 $\lambda \neq 0$ 都属于 $\rho(T)$. 如果 $\lambda = 0$, 则 $\eta_1 = 0$, 其中 $Tx = (\eta_n)$, $\overline{R(T)} \neq l^2$, $0 \notin \sigma_c(T)$, 因此 $0 \in \sigma_r(T)$, 这是由于 $\sigma_p(T) = \emptyset$.）

144. 求由

$$T_n x = \left(0, \frac{\xi_1}{1}, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots, \frac{\xi_{n-1}}{n-1}\right), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_n),$$

所定义算子 T_n： $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ 的特征值，并且说明当 $n \to +\infty$ 时会出现什么情况.

（提示： 0, 特征向量为 $x_n = (0, 0, \cdots, 0, 1)$.）

145. 定义算子 T： $l^2 \longrightarrow l^2$

$$Tx = y, \quad x = (\xi_n), \quad y = (\eta_n), \quad \eta_n = \alpha_n \xi_n,$$

其中 $\{\alpha_n\}$ 在 $[0, 1]$ 上是稠密的，证明 T 不是紧的.

（提示： 每个 α_n 都是 T 的一个特征值.）

146. 定义算子 T： $C([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$ 为

$$Tx = vx, \quad v(t) = t,$$

证明 T 不是紧的.

（提示： 如果 $\lambda \notin [0, 1]$, 则 $R(\lambda; T)x(t) = x(t)/(t - \lambda), \sigma(T) = [0, 1]$.）

147. 定义算子 T： $l^2 \longrightarrow l^2$

$$Tx = y = (\xi_2, \xi_3, \cdots), \quad x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2,$$

并且设 $m = m_0$ 和 $n = n_0$ 是使得 $\ker(T^m) = \ker(T^{m+1})$ 和 $T^{n+1}(X) = T^n(X)$ 成立的最小数，试求 $\ker(T^m)$, 有限的 m_0 存在吗？请求出 n_0.

(提示: $\{x \in l^2: \quad \xi_k = 0, \quad k > m\}$. 否. $n_0 = 0$.)

148. 设 $\lambda \in \mathbf{C}$, $f \in C([a,b])$, 则方程 $u(x) = \lambda \int_a^x u(t)\,\mathrm{d}t + f(x)$ 有唯一的解 $u \in C([a,b])$, 试求解的级数表示.

(提示: 设 $(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $u = (I-\lambda T)^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n T^n f$.)

149. 研究积分方程 $u(t) - \lambda \int_0^1 e^{t-x} u(x)\,\mathrm{d}x = f(t)$.

(提示: 令 $(T(u))(t) = \int_0^1 e^{t-x} u(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $\sigma(T) = \{0,1\}$, 当 $\lambda \neq 1$ 时, 原方程有唯一的解.)

150. 设 X 是复 Hilbert 空间, $T \in B(X)$, $|\langle Tx, x\rangle| \geq m\,\|x\|^2 (\forall x \in X)$, $m > 0$, 则 T 是可逆的.

(提示: 对于任意的 $y \in R(T)^{\perp}$ 有, $0 = \langle Ty, y\rangle \geq m\,\|y\|^2$.)

151. 定义算子 T: $l^2 \to l^2$ 为

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) = (x_2, x_4, \cdots, x_{2n}, \cdots),$$

(1) 求出 $\|T\|$ 和 T 的特征值;

(2) 证明对应于每个特征值的特征空间是无限维的;

(3) 确定算子 T^* 、TT^* 和 T^*T 的表达式;

(4) 求出 $\sigma(T)$ 和 $\rho(T)$.

(提示: (1) $\|T\| = 1$, $\sigma_p(T) = \{\lambda: \quad \lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| < 1\}$. 因为当 $|\lambda| = 1$ 时, $(1, \lambda, 0, \lambda^2, 0, 0, 0, \lambda^3, \cdots) \notin l^2$, 所以 $|\lambda| = 1$ 不是 T 的特征值.

(2) $E_\lambda = \{(\alpha_1, \alpha_1\lambda, \alpha_3, \alpha_1\lambda^2, \alpha_5, \alpha_3\lambda, \alpha_7, \alpha_1\lambda^3, \cdots): \quad \alpha_k \in \mathbf{C}\}$.

(3) $T^*(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, \cdots)$. $TT^*(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2, \cdots)$, $T^*T(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_2, 0, x_4, 0, \cdots)$.

(4) $\sigma(T) = \{\lambda: \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad |\lambda| \leq 1\}$, $\rho(T) = \{\lambda: \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad |\lambda| > 1\}$.)

152. 设泛函 F: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 具有一阶连续偏导数, 对于点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及任意的 $h = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$, 求 $f(x)$ 在点 x 沿方向 h 的弱微分.

(提示: 应用多元函数微分法则, 有

$$Df(x)h = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_x h_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_x h_2 + \cdots + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_x h_n = \langle \nabla f(x), h\rangle,$$

其中梯度 $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. 因此, f 在点 x 是弱可微的而且弱可导.)

153. 设 X 是可分无限维的 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 是 X 中的一组标准正交基，$\{\lambda_n\}$ 是满足条件 $\sup\limits_{n\geq 1}\operatorname{Re}\lambda_n = \omega < +\infty$ 的复数点列，在 X 上定义算子 A 为

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{x \in X : \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |\langle x, e_n\rangle|^2 < +\infty\right\}, \\ Ax &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n. \end{aligned}$$

则算子 A 生成 X 上的 C_0 半群，而且 $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$，并请给出半群的具体表达式.

(提示：　分四步证明.

(1)　A 是稠定算子. 对于任意给定的 $x \in X$，它可以表示为 $x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\langle x, e_n\rangle e_n$，令 $x_k = \sum\limits_{n=1}^{k}\langle x, e_n\rangle e_n$，则 $x_k \in D(A)$，$k = 1,\ 2,\ \cdots$，而且

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k - x\|^2 = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = 0.$$

(2)　A 是闭线性算子. 设 $x_m = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\langle x_m, e_n\rangle$，$e_n \in D(A)$，$x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\langle x, e_n\rangle e_n \in X$，$y = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\langle y, e_n\rangle e_n \in X$，而且 $x_m \longrightarrow x$ 和 $Ax_m \longrightarrow y\,(m \to +\infty)$，则

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_n \langle x_m, e_n\rangle = \lambda_n \langle y, e_n\rangle = \lambda_n \langle x, e_n\rangle,$$

于是 $x \in D(A)$，并且有 $y = Ax$，这就说明 A 是 X 上的闭线性算子.

(3)　$(\omega, +\infty) \subset \rho(A)$，并且当 $\lambda > \omega$ 时，有

$$\|R(\lambda; A)^k\| \leq \frac{1}{(\lambda-\omega)^k}, \qquad k = 1,\ 2,\ \cdots.$$

设 $x \in X$，考察方程 $(\lambda I - A)y = x$，则此方程等价于

$$(\lambda - \lambda_n)\langle y, e_n\rangle = \langle x, e_n\rangle, \qquad n = 1,\ 2,\ \cdots.$$

因为 $\operatorname{Re}\lambda_n \leq \omega$，因此当 $\lambda > \omega$ 时，　$\lambda - \operatorname{Re}\lambda_n \geq \lambda - \omega > 0$，从而

$$\langle y, e_n\rangle = \frac{1}{\lambda - \lambda_n}\langle x, e_n\rangle,$$

也就是 $y=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\lambda-\lambda_n}\langle x,e_n\rangle e_n$. 但因为

$$\begin{aligned}\|y\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{\lambda-\lambda_n}\right|^2|\langle x,e_n\rangle|^2\\ &\le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{|\lambda-\operatorname{Re}\lambda_n|^2}|\langle x,e_n\rangle|^2\\ &\le \frac{1}{(\lambda-\omega)^2}\|x\|^2,\end{aligned}$$

所以 $\lambda\in\rho(A)$, 而且 $R(\lambda;A)\,x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\lambda-\lambda_n}\langle x,e_n\rangle e_n$. 利用归纳法可以证明

$$R(\lambda;A)^k\,x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^k}\langle x,e_n\rangle e_n.$$

从而知

$$\|R(\lambda;A)^k\|\le\frac{1}{(\lambda-\omega)^k},\quad k=1,\ 2,\ \cdots.$$

由 Hille-Yosida 定理可知, 算子 A 生成 X 上的 C_0 半群 $\{T(t):\ t\ge 0\}$, 而且 $\|T(t)\|\le \mathrm{e}^{\omega t}$.

(4) 求出半群的具体表达式. 因为对于任意的 $x\in X$, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{tA_\lambda}x &= \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\lambda^2R(\lambda;A)t}x\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}t^k}{k!}R(\lambda;A)^k x\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}t^k}{k!}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^k}\langle x,e_n\rangle e_n\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k}t^k}{k!(\lambda-\lambda_n)^k}\right)\langle x,e_n\rangle e_n\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{\lambda^2 t}{\lambda-\lambda_n}\right)\langle x,e_n\rangle e_n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left(\frac{\lambda\lambda_n t}{\lambda-\lambda_n}\right)\langle x,e_n\rangle e_n.\end{aligned}$$

根据半群表示定理 (推论 8.8) 可知

$$T(t)\,x=\lim_{\lambda\to+\infty}\mathrm{e}^{t\,A_\lambda}\,x=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{\lambda_n t}\,\langle x,e_n\rangle\,e_n.$$

)